יעל צרפתי, דורית פטקין

השפעת פעילויות בגיאומטריה של המרחב בקרב מתכשרים להוראת מתמטיקה בבית ספר יסודי: על הבנת מושגים ושליטה ברמות חשיבה גיאומטרית

תקציר: גיאומטריה של המרחב היא נושא לימודי חשוב, המשפיע על כולם בחיי היום־יום. אנחנו חיים בעולם שהוא תלת־ממדי, ופיתוח התפישה המרחבית הוא חלק מתפקידנו כמורים. קיימות תיאוריות שונות העוסקות בהתפתחות החשיבה הגיאומטרית, אחת מהן היא תיאורית ואן־הילה, לפיה ההתפתחות וההתקדמות בחשיבה הגיאומטרית אינה תלויית גיל אלא יותר תלויית הוראה. בסדרת מחקרים בנושא (Clements and Battista, 1992; Koester, 2003) נמצא, שהקשיים בזיהוי צורות ובבניית צורות גיאומטריות מתעוררים כבר בבית הספר היסודי, אצל תלמידים צעירים, כמו גם אצל חלק מהמורים.

מחקר זה בדק האם באמצעות פעילויות ממוקדות (תוכנית התערבות) ניתן לקדם מתכשרים להוראת מתמטיקה לשליטה ברמות מתקדמות של חשיבה גיאומטרית במרחב, ולשפר את תחושותיהם בתחום דעת זה.

מהממצאים עולה, כי אפשר לקדם את הלומדים ברמות החשיבה הגיאומטרית, להביאם לשלוט ברמות חשיבה גבוהות יותר ולנקוט יחס חיובי יותר לתחום.

מילות מפתח: תאוריית ואן־הילה, מידת שליטה ברמות חשיבה בגיאומטריה של המרחב, מתכשרים להוראת המתמטיקה, רפלקציה.

רקע תיאורטי

גיאומטריה של המרחב היא פרק בגיאומטריה הנלמדת החל מגן הילדים, לאורך כל שנות הלימוד בבית הספר היסודי ובבית הספר התיכון, וכלה במכללות להכשרת מורים בתחום המתמטיקה. המושגים ההנדסיים הבסיסיים נקנים כבר בשנים הראשונות של הילד ובשנות בית הספר היסודי. לא מעט מחקרים נעשו על חשיבה של ילדים בנושא תובנה מרחבית בכלל ותפישת מושגים הקשורים בצורות גיאומטריות מרחביות בפרט (Yackel and Wheatley, 1991; Shaw 1990; Hannibal, 1999).

תובנה מרחבית בנויה משני מרכיבים, ראייה מרחבית ואוריינטציה מרחבית. אוריינטציה מרחבית היא התמצאות במרחב. ראייה מרחבית היא היכולת לדמיין מראה של צורות דו־ממדיות וגופים, תזוזה או שינויים בתכונתם (Del Grande, 1990). פיתוח ראייה מרחבית

מתבסס על התנסויות ופעילויות של הלומדים. ארגון ה-NCTM הגדיר מספר סטנדרטים המציינים מה תלמידים בגילים שונים צריכים לדעת בתחום הגיאומטריה. סטנדרטים אלה מאפשרים למורה לכוון את חומר הלימוד ולכלול בו את כל המיומנויות הנדרשות בחשיבה הגיאומטרית. המסמך מציין, שתוכניות ההוראה לגילאי גן עד י"ב צריכות לאפשר לתלמידים "לנתח מאפיינים ותכונות של צורות גיאומטריות דו־ממדיות ותלת־ממדיות ולפתח נימוקים מתמטיים אודות יחסים גיאומטריים" (NCTM, עמ' 96).

בשנים הראשונות, הציפיות הן שילדים יוכלו:

- לזהות, לשיים, לבנות, לצייר, להשוות ולמיין צורות דו־ממדיות ותלת־ממדיות.
- לתאר מאפיינים וחלקים של צורות דו־ממדיות ותלת־ממדיות.
- לחקור ולנבא את התוצאות של הרכבת צורות ושל הפרדת צורות.

גם בתוכנית הלימודים במתמטיקה בבית הספר היסודי בישראל (2006) ההדגשים העיקריים בלימודי הגיאומטריה הם: פיתוח תפישה חזותית במישור ובמרחב ופיתוח דרכי חשיבה האופייניות לגיאומטריה במישור ובמרחב (העלאת השערות, הכללות והנמקות, הסקת מסקנות, ועוד). חלק מהמטרות בהוראת הגיאומטריה הן: פיתוח כשרים גיאומטריים ופיתוח יכולת חקירה של צורות וגופים.

קיימות תיאוריות שונות העוסקות בהתפתחות החשיבה הגיאומטרית. התיאוריה בה השתמשנו במחקר זה היא תיאוריית ואן־הילה. פייר ואן־הילה ודינה ואן־הילה גלדוף, זוג מתמטיקאים הולנדים שפיתחו תיאוריה בשנות ה-50 המאוחרות, ניסו לתת הסבר לעובדה שתלמידים רבים נתקלים בקשיים בכל הקשור לתהליכים הקוגניטיביים המעורבים בחשיבה גיאומטרית בכלל, ובמתן הוכחות בפרט. הזוג ואן־הילה התייחס בתיאוריה שלו לגיאומטריית המישור בלבד. בשנים האחרונות יש מחקרים המאמצים את תיאוריית ואן־הילה במישור לענפים נוספים במתמטיקה, כמו גיאומטריה של המרחב (Patkin, 2010) ואריתמטיקה (גוברמן, 2007; Crowley, 1987). בשנת 1959 טען הזוג ואן־הילה לחמש רמות בסדר היררכי, אך כיום מקובל להתייחס לארבעה שלבים בלבד (Van Hiele, 1987; Gutierrez, 1992; פטקין ולבנברג, 2010): הבחנה, ניתוח, סידור, היקש ומסקנה.

1. **שלב ההבחנה או השלב הוויזואלי** — בשלב ראשוני זה הלומד יודע לזהות צורות גיאומטריות ולהבחין ביניהן וכל אחד מהמושגים או מהצורות נתפש כשלם, כפי שהוא נראה. הלומד מסוגל להבחין בין גופים שונים ויודע לתת להם שמות. בשלב זה, הלומד אינו יודע לפרט את התכונות של אותם גופים.
2. **שלב הניתוח או התיאור** — בשלב זה הלומד יודע לנתח תכונות של גופים, אך אינו יכול לשייך תכונות של גוף כלשהו לתכונות הקבוצה אליה הוא שייך. לדוגמה: הלומד יודע

שהפאות בתיבה הן מלבניות, אך אינו יודע להכליל שכל קוביה היא תיבה.

3. **שלב הסידור או המסקנה הבלתי פורמאלית** — בשלב זה הלומד מזהה סדר הירכי של הכלה בין קבוצות של צורות על־פי תכונותיהן והגדרותיהן, אולם אינו יודע להוכיח טענות הנוגעות לתכונות של הצורות הגיאומטריות. לדוגמה: ברמה זו הלומד מבין את היחס בין מנסרה לקוביה (שכל קוביה היא מנסרה), אך אינו יודע להוכיח את התכונה המתייחסת לארבעת אלכסוני הקוביה, השווים ביניהם וחוצים זה את זה.
4. **שלב ההיקש, המסקנה והדיוק, או שלב המסקנה הפורמאלית** — בשלב זה הלומד יודע מה התפקיד של מונחי היסוד, האקסיומות, ההגדרות, המשפטים וההוכחות והקשרים ביניהם. הלומד יכול להשתמש בהנחות כדי להוכיח משפטים ומבין את המשמעות של תנאים הכרחיים ומספיקים. הוא אף מסוגל לתת סיבות ונימוקים לשלבים השונים בהוכחה.

לפי תיאוריית ואן־הילה, שליטה חלקית ברמה מסוימת היא תנאי הכרחי, אך לא מספיק לשליטה ברמה גבוהה יותר. לא ייתכן שאדם ישלוט ברמה x לפני שישלוט ברמה: x-1. כלומר, הוא חייב לשלוט **בכל** הרמות הקודמות, אחרת נקרא לו "בלתי עקבי".

חשוב לציין, כי בניגוד לתיאוריות למידה אחרות, בעיקר זו של פיאז'ה, התיאוריה של ואן־הילה מתבססת על ההנחה כי ההתקדמות מרמה אחת לשנייה תלויה יותר בהוראה מאשר בגיל או בבגרות ביולוגית (Van Hiele, 1999). על פי גדס (Geddes et al., 1982), וסוגי הוראה יכולים להשפיע בצורה שונה על ההתקדמות.

מחקרים מצביעים על כך שלתלמידים בכל גיל וגם למורים בגיאומטריה של המרחב יש קשיים בתחום זה (Koester, 2003). במחקר בנושא גיאומטריה וחשיבה מרחבית בקרב ילדים בגני ילדים ובבתי ספר יסודיים, שבו נבדק ביצוע של אותה משימה, עלה כי למרות פער של כמעט שמונה שנים בין הנבדקים הצעירים (ילדי הגן) לנבדקים הבוגרים (ילדי כיתה ו'), הציונים באותן משימות עלו רק במידה מזערית (Clements and Battista, 1992). במחקר שבדק "ידע עצמי" של מורים למתמטיקה בבית ספר יסודי, נמצא שבמסגרת חשיפת הידע העצמי שלהם, הצביעו המורים על חוסר שליטה והבנה בגיאומטריה של המרחב. אולם, לאחר התוודעות לתיאוריית ואן־הילה, כולל התנסויות, בהיותם במצבים שעודדו רפלקציה של חשיבה על חשיבה ("מטה קוגניציה"), הם התקדמו ברמות החשיבה שלהם וגילו פתיחות ורצון ללמוד, להתמודד ולהשתפר (Patkin, 2010).

קראולי (Crowley, 1987) טוענת, שסוג הפעילויות הניתנות ללומדים הוא משמעותי. במחקרה שבדק חשיבה גיאומטרית במישור, היא הראתה שההתאמה בין רמת ההבנה של הלומדים ורמת המשימות שהם מקבלים הינה חיונית, אם רוצים שתתרחש למידה משמעותית. בלשף (Balacheff, 1987) מדבר על החשיבות הרבה שיש לתת להמללה, להסברים ולהצדקות

של הלומד ועל כך שיש ללמד כל נושא מתמטי, כולל גיאומטריה, דרך פעילויות ומצבים, שבהם הלומד ימליל ויצדיק את הסבריו והבנתו. הוא גם מבדיל בין מספר רמות של הסברים והוכחות. מורים צריכים להיות מודעים מאוד לדרגות ההצדקה השונות שבהן אוחזים הלומדים (הרשקוביץ, 1991).

חשוב לציין, כי מרבית המחקרים העוסקים בקשיים ברמות החשיבה בגיאומטריה מתייחסים לגיאומטריה במישור. לאור כל זאת, במסגרת קורסים להכשרת מורים ובהשתלמויות במסגרות שונות, בגיאומטריה של המישור ושל המרחב, יש לחשוף את המתכשרים להוראה לפעילויות יישומיות המשלבות המללה, שיחה, הסברים והצדקה ברמות השונות, מהרמה האינטואיטיבית לרמת ההבנה הלוגית.

מחקר זה התמקד בשלוש הרמות הראשונות במרחב לפי תיאוריית ואן־הילה: שלב ההבחנה, שלב הניתוח ושלב הסידור. מטרות המחקר היו לבדוק האם תוכנית ההתערבות עם פעילויות ממוקדות מטרה בגיאומטריה של המרחב, מקדמות את המתכשרים להוראת מתמטיקה בשליטה ברמות החשיבה הגיאומטרית שלהם, וכן לבדוק את תחושותיהם כלפי תחום דעת זה לפני תוכנית ההתערבות ואחריה.

שאלות המחקר

1. האם יש שיפור בשליטה ברמות החשיבה של מתכשרים להוראת מתמטיקה, בעקבות פעילות ממוקדת מטרה בגיאומטריה של המרחב?
2. האם יש שינוי לטובה בתחושות המתכשרים להוראת מתמטיקה כלפי גיאומטריה של המרחב, בעקבות פעילות ממוקדת מטרה בנושא?

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר מנתה 22 מתכשרים להוראת מתמטיקה לבית הספר היסודי בשנה הראשונה במכללה להכשרת מורים. כל המתכשרים היו בעלי תעודת בגרות מלאה. שני סטודנטים נבחנו בחינת בגרות במתמטיקה ברמה של 5 יחידות לימוד, 14 סטודנטים נבחנו ברמה של 4 יחידות לימוד, ושישה נבחנו בבחינת הבגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות לימוד.

מערך המחקר

כלי המחקר היו: 1. שאלון לקביעת רמות חשיבה בגיאומטריה. 2. שאלון רפלקטיבי.

1. שאלון ואן־הילה במרחב שפותח על ידי פטקין ומלאת (1999), הבודק את שלוש רמות החשיבה הראשונות על־פי תיאורית ואן־הילה. המבחן כלל 15 פריטים, כאשר כל חמישה פריטים מייצגים רמת הבנה נפרדת. השאלות ניתנו בערבוב וללא סדר של רמות (כפי שהוצג בשאלון המקורי אצל פטקין ומלאת (1999)).

השאלות המייצגות את הרמה הראשונה הן שאלות מספר: 1, 3, 8, 11, 13. השאלות המייצגות את הרמה השנייה הן שאלות מספר: 4, 7, 10, 12, 14. השאלות המייצגות את הרמה השלישית הן שאלות מספר: 2, 5, 6, 9, 15 (ראו נספח א'). משך הזמן הנדרש למענה היה 30 דקות.

2. שאלון רפלקטיבי — המתכשרים להוראה היו צריכים לענות בכתב על השאלה: מה הייתה הרגשתכם כאשר עניתם על שאלון ואן־הילה במרחב? השאלון ניתן פעמיים. מטרתו: רפלקציה — תחושות ועמדות. בפעם הראשונה הוא ניתן בעקבות המילוי הראשון של שאלון ואן־הילה במרחב, ובפעם השנייה לאחר תוכנית ההתערבות ומילוי השאלון של ואן־הילה במרחב בשנית.

מהלך המחקר — המחקר נערך במסגרת קורס שנתי בגיאומטריה. בתחילת הקורס, לפני הפעלת תוכנית ההתערבות, הועברו שאלוני ואן־הילה לכל המתכשרים (pre), ועם סיום מילוי השאלון הם התבקשו לתאר בכתב את תחושותיהם בעקבות זאת (שאלון רפלקטיבי). לאחר מכן התנהלו שישה שיעורים של שעה וחצי בכל פעם (תוכנית ההתערבות), במסגרתם נערכו פעילויות והתנסויות רב גוניות בגופים, תוך שימוש באמצעי המחשה והתנסות בפועל בבניית גופים בהתייחס לרמות החשיבה השונות במרחב (דוגמה לחלק מהפעילויות נמצאת בנספח ב'). בסיום הפעילות התבקשו המתכשרים לענות שוב על השאלונים (post) וכן לתאר שוב את תחושותיהם בכתב בעקבות מילוי השאלון.

כלי הניתוח

1. **רמת החשיבה הגיאומטרית** של הסטודנטים משתתפי המחקר נבדקה באמצעות ממוצע ציונים גולמיים (באחוזים), ממוצע ציונים משוקללים ומידת השליטה שלהם ברמות החשיבה הגיאומטריות על פי תיאורית ואן־הילה.

הערה: ממוצע ציונים משוקללים נקבע על־פי הקריטריון לפיו לפחות ארבע תשובות נכונות מתוך חמש בכל רמה מזכה בנקודות. קריטריון זה נמצא מאבחן טוב בין רמות החשיבה (אוסישקין, אצל פטקין, 1990). הציונים המשוקללים נקבעו לפי הנוסחה הבאה: ציון משוקלל = עמידה בקריטריון ברמה 1 + עמידה בקריטריון ברמה 2 + עמידה בקריטריון ברמה 3.
אם a הוא המשתנה המייצג את העמידה בקריטריון ברמה, והוא מקבל את הערכים 0 או 1, הרי שהציון המשוקלל ניתן לייצוג באופן הבא:
ציון משוקלל = $a * 1 + a * 2 + a * 4$. (אם היינו מתייחסים גם לרמה הרביעית יש להוסיף למחוברים גם את $a * 8$). לכן, טווח הציונים, המתייחס לשליטה בשלוש רמות החשיבה הראשונות של הגיאומטריה, נע בין 7–1 (פטקין, 1990).

באמצעות הציונים המשוקללים, ניתן לאתר את רמות החשיבה של המתכשרים, כאשר מתכשר להוראה שלא הגיע לשליטה ברמה הראשונה יקבל ציון 0, מתכשר להוראה השולט ברמה ראשונה יקבל ציון 1, ברמה שניה יקבל ציון 3, וברמה שלישית יקבל ציון 7. שאר הציונים מייצגים את המתכשרים ה"בלתי עקביים".

2. השאלונים נותחו באופן איכותני.

ממצאים

1. שאלת המחקר הראשונה התמקדה ברמת החשיבה הגיאומטרית. בלוח מספר 1 מוצגים הממוצעים באחוזים וסטיית התקן של הציונים הגולמיים לפני הניסוי (pre) ומיד לאחר הניסוי (post).

לוח מספר 1: ממוצע הציונים הגולמיים וסטיות התקן בשאלון ואן־הילה (באחוזים)

מבחן	ממוצע	סטיית תקן
pre	49.7	28.6
post	94	7

מלוח מספר 1 אפשר לראות כי ממוצע הציונים הגולמיים גדל וסטיית התקן קטנה משמעותית. כמו כן עולה, כי יש שיפור בידיעת התחום של הגיאומטריה של המרחב, כאשר שיפור הלמידה מוגדר כהפרש בין הממוצע של הציונים הגולמיים ב-pre — post (44.3%).

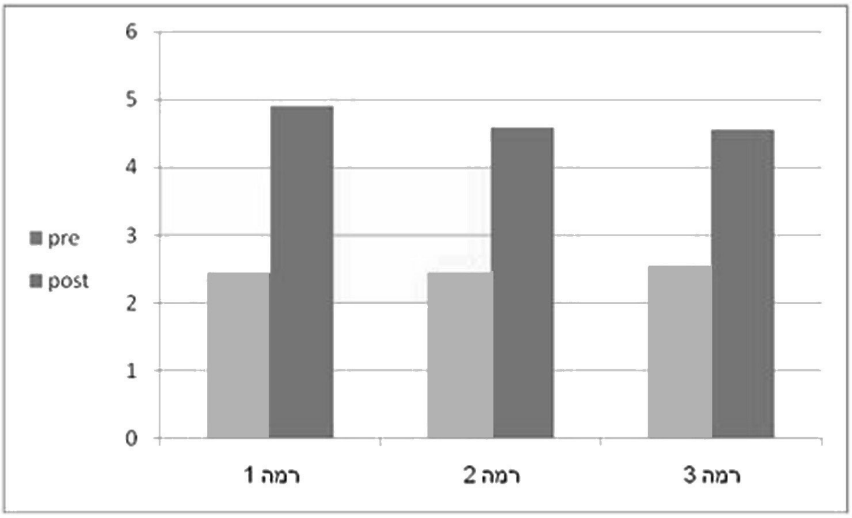
בלוח מספר 2 מוצגים הציונים המשוקללים של המתכשרים להוראה בכל רמה.

לוח מספר 2: הציונים המשוקללים של המתכשרים להוראה בכל רמה

רמה	מועד המבחן	ממוצע התשובות הנכונות השייכות לרמה	סטיית תקן
1	Pre	2.45	1.01
	Post	4.91	0.29
2	Pre	2.45	0.66
	Post	4.59	0.67
3	Pre	2.55	1.23
	Post	4.55	0.96
סה"כ ממוצע תשובות נכונות	pre	2.48	1.45
	Post	4.68	0.6

תרשים מספר 1 שלהלן, מתאר בהיבט נוסף את פרופיל העונים מספר תשובות נכונות בשאלון ואן-הילה במרחב, בחלוקה לרמות.

תרשים מספר 1: פרופיל העונים מספר תשובות נכונות בשלוש רמות ראשונות



מלוח מספר 2 ותרשים מספר 1 ניתן לראות, כי העלייה בממוצע התשובות הנכונות הייתה בכל שלוש רמות החשיבה ובטווח של 2-2.46.

לוח מספר 3 מציג את התפלגות המתכשרים להוראה שענו נכון על לפחות 4 שאלות בכל רמה (באחוזים).

לוח מספר 3: התפלגות המתכשרים להוראה שענו נכון על לפחות 4 שאלות בכל רמה (באחוזים)

הרמה	pre	post
1	18.2	95.5
2	9.1	91
3	27.3	91

מלוח זה עולה, כי רק 18.2% מהמשיבים ענו נכון על השאלות המתייחסות לרמת החשיבה הראשונה, העוסקת בשלב הוויזואלי, בעוד ש-27.3% מהמשיבים ענו נכון על השאלות

המתייחסות לרמת החשיבה השלישית, העוסקת בשלב הסידור. כלומר, לפני תחילת תוכנית ההתערבות נמצאו מתכשרים להוראה שזוהו כ"בלתי עקביים" ברמות החשיבה הגיאומטריות שלהם.

לצורך חידוד, נותחו ממצאי המחקר גם בהתייחס למדד השליטה ברמות החשיבה על־פי ואן־הילה.

לוח מספר 4 מציג את התפלגות המתכשרים להוראה השולטים ברמות החשיבה השונות על־פי תיאורית ואן־הילה (באחוזים).

לוח מספר 4: התפלגות המתכשרים להוראה השולטים ברמות החשיבה השונות על־פי תיאורית ואן־הילה

ציון משוקלל	רמה	Pre (N=22)	post (N=22)
0	0	59 (13)	0
1	1	0	4.5 (1)
3	2	0	4.5 (1)
7	3	4.5 (1)	82 (18)
אחרת	"בלתי עקביים"*	36.5 (8)	9 (2)

* לא שולטים ברמה הקוגנטיבית על פי ההגדרה.

בלוח מספר 4 נמצא, שחל שינוי בשליטה ברמות החשיבה על־פי תיאורית ואן־הילה, כאשר השינוי הגדול, 82%, התרחש ברמת החשיבה השלישית. לעומת זאת, נמצא שיש ירידה ניכרת באחוז המתכשרים להוראה המוגדרים כ"בלתי עקביים". לפני ההתערבות היו שמונה מתכשרים (36.5%) כאלה לעומת שני מתכשרים (9%) לאחר ההתערבות.

לוח מספר 5 מציג את השליטה הממוצעת ברמת החשיבה.

לוח מספר 5: השליטה הממוצעת ברמת החשיבה

זמן	ממוצע הציונים המשוקללים	סטיית תקן
pre	0.13	2.55
post	2.59	1.53

מעיון בלוח מספר 5 עולה, כי חלה עלייה בשליטה הממוצעת ברמת החשיבה וקטנה סטיית התקן.

2. שאלת המחקר השנייה עסקה ברפלקציה.

מיד לאחר מילוי השאלון הראשון, עוד לפני תוכנית ההתערבות, נדרשו המשתתפים במחקר, לעשות באמצעות שאלונים, רפלקציה על מילוי השאלון לקביעת רמות חשיבה בגיאומטריה. כולם, בלי יוצא מן הכלל, דיווחו על תחושה של תסכול, בורות, בושה וחוסר ביטחון בתחום. התגובות נחלקו לשניים: לרגשות ולידע, או לחוסר ידע בתחום.

נמנו 28 היגדים הקשורים לרגשות:

- תסכול, חוסר אונים ואכזבה (7 היגדים) — "הרגשה לא נעימה של תסכול..."; "הרגשתי שאני לא יודעת חומר שילדים קטנים יודעים..."; "תחושה של כישלון שעד היום אינני יודעת את פירוש המילה "מנסרה", "גליל", וכו', בזמן שזה נושא של ילדים שנלמד בבית ספר יסודי".
- בלבול (7 היגדים) — "הרגשתי מבולבלת, לא ידעתי במה להתמקד"; "לא הכרתי את השמות ואת החלקים, ולא הצלחתי ליצור תמונה שלמה. כאילו אני יודעת אבל לא באמת יודעת".
- מבוכה ובושה (6 היגדים) — "לא הרגשתי נוח להגיש לך את השאלון, הרגשתי לא טוב מעצמי וגם ממך!"; "הרגשה לא נעימה, הרגשתי שאני רק מסתבכת"; "בושות שאני לא זוכרת...".
- לחץ, חשש ובהלה (5 היגדים) — "נלחצתי! ניחשתי הרבה מהתשובות"; "היה לחץ כי ברוב השאלות לא הייתי בטוחה אם אני עונה נכון או לא..."; "הרגשתי מבוהלת..."; "פחדתי לפשל".
- חוסר ביטחון (3 היגדים) — "חוסר הביטחון הזה שחוויתי שיגע אותי".

נמנו 20 היגדים הקשורים לידע או לחוסר ידע בתחום:

- חוסר ידע, בורות (14 היגדים) — "רוב מה שכתבתי היה המצאה וניחוש"; "הידע שלי בזמן הבוחן היה אפסי"; "הרגשתי בורה ומתוסכלת!"; "הרגשתי חוסר ודאות וחוסר התמצאות במרחב הידע של גופים".
- חוסר זיכרון ושיכחה (5 היגדים) — "הרגיז אותי כמה מהר שכחתי את התכונות, שהזיכרון שלי נמחק"; "כל החוקים והכללים התערבבו אחד בשני ולא זכרתי שום דבר. לא מהתיכון ולא מהפסיכומטרי — למרות שזה היה רק לפני שנה"; "מדוע אני לא זוכרת דברים כה בסיסיים?...".
- חוסר וודאות (היגד 1) — "הרגשתי שאני טיפשה ולא מכירה כלום".

לאחר שישה שבועות, עם תום תוכנית ההתערבות ולאחר מילוי השאלון בפעם השנייה, נדרשו המתכשרים להוראה לעשות רפלקציה נוספת על התהליך שחוו במשך זמן זה. כל המשתתפים דיווחו על שיפור בתחושות, על הרגשת ביטחון ועל שיפור בידע. גם פה התגובות נחלקו לשניים: לרגשות, ולידע בתחום.

נמנו 14 היגדים הקשורים לרגשות:

- הרגשה טובה (5 היגדים) — "ההרגשה יותר טובה, לא כמו קודם כשלא היה לי מושג על מה מדובר"; "אני מרגישה הרבה יותר טוב. הצלחתי לעלות מחצי תשובות נכונות בשאלון הראשון להצלחה מלאה בשני!!"
- ביטחון (4 היגדים) — "היום אני מרגיש הרבה יותר בטוח בחומר וקל לי הרבה יותר"; "יש לציין שהיום, אחרי שלמדנו את הנושא, יש ביטחון וידע על הנושא יותר מתמיד".
- אהבת המקצוע (2 היגדים) — "התחלתי לאהוב ולהבין הנדסה".
- תחושת הצלחה (2 היגדים) — "אני חושבת שמצבי ממש השתפר".
- חוסר פחד — "עכשיו אני יכולה לגשת לנושא בלי פחד ועם יותר רצון מאשר בעבר".

נמנו 18 היגדים הקשורים לידע:

- ידע (12 היגדים) — "אני מרגישה שהיום אני יודעת הרבה יותר!"; "אני מרגישה שיפור גדול מתחילת השנה, אני שולטת יותר במושגי יסוד ובהכרה של תכונות הגופים שעליהן עברנו. מתרגשת ומחכה להמשך".
- הרגשת שליטה (3 היגדים) — "יש שליטה הרבה יותר טובה בחומר", "אני מרגישה הרבה יותר טוב כי השליטה שלי הרבה יותר טובה"; "יותר בטוחה במושגים, יותר שליטה בנושא".
- הבנה (3 היגדים) — "אני מרגישה שאני מבינה את החומר הזה"; "עכשיו זה לא רק זיכרון, אלא גם הבנתי את החומר הרבה יותר טוב"; "היום, אחרי הלמידה נזכרתי בכל החומר שכבר נלמד לפני שנים ושלא זכרתי אותו בתחילת הלימוד".

לסיכום, מניתוח הממצאים עולה, כי תוכנית ההתערבות קידמה את המתכשרים להוראה בשליטה ברמות החשיבה הגיאומטריות. השימוש בהצגה חזותית ובפעילויות מוחשיות בהוראה גרם למתכשרים להוראה להבין את החומר ושידרג את הידע שלהם לרמת יישום. חיזוק לכך נמצא גם בניתוח הרפלקציה שנעשתה לפני התהליך ובסופו.

דיון ומסקנות

מטרות המחקר היו לבדוק האם תוכנית ההתערבות, עם פעילויות ממוקדות מטרה בגיאומטריה של המרחב, מקדמות את המתכשרים להוראת מתמטיקה בשליטה ברמות החשיבה הגיאומטרית שלהם, וכן לבדוק את תחושותיהם כלפי תחום דעת זה לפני תוכנית ההתערבות ואחריה. הפעילויות בתוכנית ההתערבות התייחסו לשלוש רמות החשיבה הראשונות על־פי תיאוריית ואן־הילה (Van Hiele, 1987, 1999) בלבד.

מחקרים שבחנו את יכולתם הגיאומטרית של מתכשרים להוראה מצביעים על כך שרוב הנבדקים שולטים בדרך כלל בשתי הרמות הראשונות ורק חלק קטן מהם שולטים ברמה השלישית (Gutierrez, Jaime and Fortuny, 1991). סוואפורד, ג'ונס ותורנטון (Swafford, Jones and Thornton, 1997) מצאו במחקרם, שתוכנית התערבות לתקופה קצרה יכולה לשפר את הידע הגיאומטרי של משתתפיה וכי נמצא שיפור לפחות ברמה אחת ברמות החשיבה על־פי תיאוריית ואן־הילה. הם הסיקו מכך, שבעזרת הוראה ממוקדת ניתן לקדם מבוגרים ברמות ואן־הילה במהירות ובקלות.

גם ממצאי המחקר הנוכחי תומכים במסקנות מחקרים אלו. מתכשרים להוראה, כולם בעלי השכלה תיכונית, הכוללת תעודת בגרות במתמטיקה, שנחשפו בצורה ישירה או עקיפה לגיאומטריה של המרחב בלימודיהם הקודמים (ההבדל נעוץ ביחידות הלימוד במתמטיקה שעשו בתיכון), הפגינו לפני הניסוי חוסר שליטה ברמות החשיבה (ממוצע משוקלל: 0.13), בעוד שלאחר תוכנית ההתערבות ניכרה התקדמות בשליטה ורובם שלטו ברמת החשיבה השלישית (ממוצע משוקלל: 2.59).

השאלון התייחס לשליטה בשלוש הרמות הראשונות בלבד, ולכן מומלץ להמשיך ולפתח פעילויות ממוקדות מטרה הכוללות פעילויות ברמה הרביעית כדי לקדם את המתכשרים להוראה לשליטה ברמת החשיבה הגבוהה ביותר.

חיזוק לחשיבות של תוכנית התערבות מעין זו ולתרומתה עולה גם מהשאלונים הרפלקטיביים. בעוד שלפני תוכנית ההתערבות הדיווחים היו על תיסכול, בלבול, חוסר ידע ואי ביטחון, הרי שבעקבות הפעילויות דיווחו המתכשרים להוראה על הצלחה, הרגשת ביטחון ורצון להמשיך ללמוד ולהשתפר בתחום.

לאור כל זאת מומלץ לאמץ גישה זו בהתמודדות עם תכנים גיאומטריים נוספים.

ביבליוגרפיה

גוברמן, ר' (2007). הקשר בין רמת ההתפתחות של החשיבה האריתמטית של פרחי הוראה לבין המצופה מהם בלמידה משמעותית. מחקר לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת תואר "דוקטור לפילוסופיה" אוניברסיטת בן גוריון.

הרשקוביץ, רנה (1991). אספקטים קוגניטיביים בהוראה ובלמידה של גיאומטריה. על"ה, 9, 10-9.

פטקין, ד' (1990). "השפעת השימוש במחשב ללמידה עצמית, במערך למידה יחידנית של זוגות, על תפישה והבנת מושגים בגאומטריה אוקלידית, ברמות חשיבה שונות, בקרב תלמידי בית ספר תיכון". חיבור לשם קבלת תואר ד"ר לפילוסופיה, אוניברסיטת תל־אביב.

פטקין, ד' ולבנברג, א' (2010). **הנדסת המישור**, חלק א', הוצאה: המחברות.

פטקין, ד' ומלאת, ש' (1999). "ידע עצמי" בהנדסת המרחב של מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי. **דפים —** כתב עת לעיון ומחקר בהכשרת מורים, גליון 28.

תוכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות א'-ו' בכל המגזרים (2006). משרד החינוך התרבות והספורט, ת"ל, ירושלים.

Balacheff, N. (1987). **Towards a Problématique for Research on Mathematics Teaching**, Anaheim, CA.

Clements, D.H., and Battista, M.T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning, in D. A. Grouws (Ed), **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, New York: Macmillan, pp. 420-464.

Crowley, M.L. (1987). Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought, in **Learning and Teaching Geometry**, K-12, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Mary Montgomery Lindquist and Albert P. Shulte, Reston, VA.:NCTM, pp. 1-16

Del Grande, J. (1990). Spatial Sense, **Arithmetic Teacher**, **37**(6), NCTM: National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, pp. 14-20.

Geddes, D., Fuys, D., Lovett, J. C. and Tischler, R. (1982). **An Investigation of the Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents**, Project Report, presented at NCTM 1982 Annual Meeting, Toronto, Canada.

Gutierrez, A., Jaime, A., and Fortuny, J. M., (1991). An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the Van Hiele Levels, **Journal for Research in Mathematics Education**, **22**(3), pp. 237-251.

Gutierrez, A. (1992). Exploring the Links Between Van Hiele Levels and 3-Dimensional Geometry, **Structural Topology**, **18**, pp. 31-48.

Hannibal, M. A. (1999). Young Children's Developing Understanding of Geometric Shapes, **Teaching Children Mathematics**, **2**, pp. 353-357.

Koester, B. A. (2003). Prisms and Pyramids: Constructing Three-Dimensional Models to Build Understanding, **Teaching Children Mathematics**, **9** (8), pp. 436-442.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA.: NCTM, 2000.

Patkin, D. (2010). The Role of "Personal Knowledge" in Solid Geometry Among Primary School Mathematics Teachers, **Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education**, **14**(3), pp.263-279.

Swafford, J.O., Jones G.A. and Thornton, C.A. (1997). Increased Knowledge in Geometry and Instruction Practice, **Journal for Research in Mathematics Education**, **28**(4), pp. 467-483.

Shaw, J.M. (1990). By Way of Introduction, **Arithmetic Teacher**, **37** (6), NCTM: National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, pp. 4-5.

Van Hiele, P.M. (1987). Van-Hiele Levels, a Method to Facilitate the Finding of Levels of Thinking in Geometry by Using the Levels in Arithmetic, Paper Presented at the Conference on Learning and Teaching Geometry: Issues for Research and Practice, Syracuse University.

Van Hiele, P.M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play, **Teaching Children Mathematic**, **5**(6), pp. 310-316.

Yackel, E and Wheatley, G.H. (1990). Promoting Visual Imagery in Young Pupils. **Arithmetic Teacher**, **37**(6), NCTM: National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA., pp. 52-58.

e-mail: Yael_sar@bezeqint.net
patkin@netvision.net

נספח א'

שאלון בהנדסת המרחב

1. *הקיפו את המנסרה מבין הגופים הבאים:*

2. *אילו מהטענות הבאות נכונה תמיד?*

א. אם לגוף יש שני בסיסים אז הוא בהכרח תיבה.
ב. אם לגוף יש שני בסיסים אז הוא בהכרח פאון.
ג. אם לגוף שני בסיסים אז הוא בהכרח גליל.
ד. אם לגוף יש שני בסיסים אז הוא בהכרח גוף משוכלל.
ה. כל הטענות א-ד אינן נכונות.

3. *יש להקיף בעיגול את החפץ שצורתו מנסרה:*

ספר בקבוק כוס חבית כובע של ליצן

4. *איזו מבין הטענות הבאות אינה נכונה לכל מנסרה:*

א. למנסרה שני בסיסים חופפים ומקבילים.
ב. המעטפת של המנסרה מורכבת ממלבנים או ממקביליות.
ג. כל הפאות של המנסרה הן מלבנים או מקביליות.
ד. המנסרה היא גוף תלת ממדי.
ה. כל הטענות א-ד אינן נכונות.

5. *איזו מבין הטענות הבאות נכונה?*

א. אם הגוף הוא פאון הוא גם מנסרה.
ב. אם הגוף הוא מנסרה אז הוא גם פאון.
ג. אם גוף אינו פאון אז הוא מנסרה.
ד. אם גוף אינו מנסרה אז הוא אינו פאון.
ה. כל הטענות א- ד נכונות.

6. *איזו מבין הטענות הבאות נכונה?*

א. אם לגוף 8 קדקודים אז הוא בהכרח תיבה.

ב. אם לגוף 8 קדקודים אז הוא בהכרח קוביה.

ג. אם לגוף 8 קדקודים אז הוא בהכרח פירמידה.

ד. אם לגוף 8 קדקודים אז הוא בהכרח גוף משוכלל.

ה. כל הטענות א-ד אינן נכונות.

7. *אילו מבין הטענות הבאות נכונה לכל גליל?*

א. בסיסי הגליל הם עגולים.

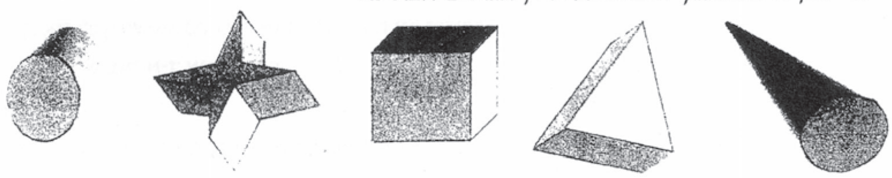
ב. בסיסי הגליל הם ריבועים חופפים ומקבילים.

ג. בסיסי הגליל מורכבים ממצולעים משוכללים.

ד. בסיסי הגליל הם מחומשים.

ה. בסיסי הגליל הם משולשים.

8. *הקיפו את הגוף המשוכלל מבין הגופים הבאים:*



9. *איזו מבין הטענות הבאות נכונה?*

א. אם הגוף הוא משוכלל אז הוא קוביה.

ב. אם הגוף הוא קוביה אז הוא גם גוף משוכלל.

ג. אם הגוף אינו גוף משוכלל אז הוא קוביה.

ד. אם הגוף אינו קוביה אז הוא לא גוף משוכלל.

ה. כל הטענות א-ד נכונות.

10. *איזו מבין הטענות הבאות נכונה לכל פאון?*

א. בפאון כל הפאות חופפות.

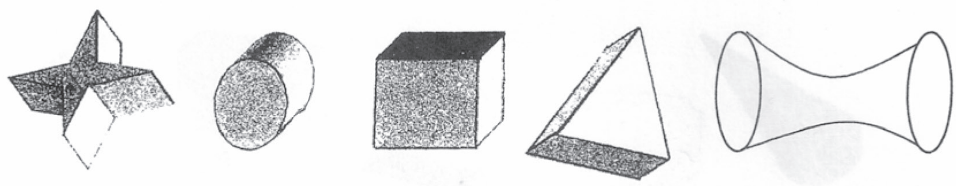
ב. כל פאון מורכב מזוגות של פאות מקבילות.

ג. בפאון אין משטחים עקומים.

ד. בכל קדקוד בפאון נפגשים אותו מספר של פאות.

ה. כל טענות א-ד נכונות.

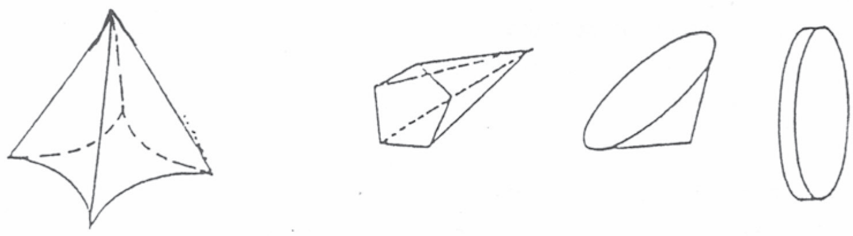
11. *מבין הגופים הבאים, נא להקיף את הגוף שצורתו גליל:*



12. *לקוביה יש:*

א. 12 פאות ב. 4 פאות ג. 6 פאות ד. 8 פאות ה. 2 פאות

13. *איזה מהגופים הבאים הוא פירמידה?*



14. *אילו מהטענות הבאות נכונה לכל מנסרה?*

א. מעטפת מנסרה בנויה כולה ממשולשים.

ב. למנסרה יש שני בסיסים מקבילים.

ג. בסיסי המנסרה הם בצורת מלבן.

ד. מעטפת מנסרה מורכבת ממצולעים משוכללים.

ה. בכל קדקוד במנסרה נפגשים ארבע צלעות.

15. *המשותף לכל הפירמידות הוא:*

א. לכל הפירמידות יש בסיס משולש.

ב. המעטפת בנויה ממשולשים.

ג. הבסיס צורתו מרובע והמעטפת בנויה ממשולשים.

ד. כל פאות הפירמידה – משולשים.

ה. כל הטענות א-ד אינן נכונות.

נספח ב'

דוגמה לפעילויות מתוכנית ההתערבות:

1. שלב החקירה: שלב שבו הלומדים מובילים בעצמם באופן אישי לגילוי הידע האישי שלהם. בשלב זה שלושה תתי־שלבים:

1.1 פעילות יחידנית. במסגרתה קיבל כל לומד מטלה המתייחסת למושג הנלמד ומשקפת ומעלה למודעות את הידע העכשווי שלו בנושא הנלמד.
לדוגמה: בשיעור הראשון היה על הלומדים לנסות לתת שם לקבוצת גופים נתונה ולאחר מכן לנסות למיין את אותם גופים על־פי קריטריונים שייבחרו על ידיהם. בסוף שלב זה נאספה האינפורמציה הכתובה.

1.2 פעילות קבוצתית. במסגרתה התחלקו הלומדים לקבוצות עבודה של 4-5 איש. בכל קבוצה נבחר משתתף שהתבקש לתעד את כל התהליך הקבוצתי שהתרחש, כולל השיח. בהתחלה כל לומד הציג בפני הקבוצה את הדרך שלו לפתרון המטלה (שניתנה בשלב הראשון) ובכך שיתף את הקבוצה בידע האישי שלו והתוודע לידע האישי של עמיתיו. לאחר מכן, חברי הקבוצה החליטו איזה מידע הם רוצים להציג בפני המליאה ונימקו מה היו השיקולים לבחירה זו.
לדוגמה: הלומדים דיווחו לקבוצה על המיונים והקריטריונים על־פיהם מיינו באופן יחידני ואז החליטו על מיונים וקריטריונים מוסכמים, שאותם ירצו להציג במליאה כקבוצה. בסוף שלב זה נאספה האינפורמציה הכתובה.

1.3 פעילות במליאה. ראשי הקבוצות דיווחו על הדיון הקבוצתי ותוצריו.
לדוגמה: כל ראש קבוצה דיווח על המיונים והקריטריונים שהוחלט עליהם בקבוצתו למיון הגופים ועל טעויות ותפישות מוטעות שהועלו בקרב כל אחד מחברי קבוצתו.

2. שלב ההסבר: שבו המרצה הציגה טרמינולוגיה של המושגים ועודדה את הלומדים להשתמש בהם בשיחותיהם ובעבודתם.

2.1 סיכום הפעילות הכיתתית והקניית המושגים על ידי המרצה תוך כדי טיפול בטעויות ובתפישות המוטעות.

2.2 אוריינטציה חופשית. מתן מטלות ללומדים בהן בא לידי ביטוי (באופן ישיר ובאופן עקיף) השימוש באותם מושגים נרכשים במטרה להעלות את המיומנות שלהם ואת אפשרות היישום של אותם מושגים נרכשים.

2.3 אינטגרציה. המרצה הקיפה את כל מה שחקרו וערכה סינתזה של כל הנושא הנלמד.