

ידע ותחושת מסוגלות של מורים למתמטיקה לתלמידים עם לקויות למידה: הבדלים בין כפל לבין חילוק

איריס שרייבר ורחל פילו

תקציר

המאמר מתאר חלק ממחקר* העוסק בהוראת כפל וחילוק של מספרים טבעיים ואפס בכיתות החינוך המיוחד לתלמידים עם לקויות למידה. במסגרת המחקר נבדקו שני גורמים שיכולים להשפיע על תהליכי הוראה-למידה – ידע המורים ותחושת המסוגלות (self-efficacy) שלהם לגבי ידע זה, כלומר מידת הביטחון שלהם בהוראת הנושא. במחקר השתתפו 64 מורים למתמטיקה לתלמידים עם לקויות למידה, בעלי ותק בהוראת מתמטיקה – משנת ותק אחת ועד 35 שנות ותק, וממגוון מסגרות הכשרה. הידע ותחושת המסוגלות נבדקו על ידי השוואה בין פעולת הכפל לפעולת החילוק.

במחקר זה נמצא הבדל ברמת הידע הפדגוגי של המורים בכפל בהשוואה לידע הפדגוגי שלהם בחילוק: ברוב השאלות רמת הידע בפעולת הכפל נמצאה גבוהה יותר מאשר בהתייחס לפעולת החילוק, וכך גם תחושת המסוגלות: בכל השאלות נמצא כי למורים תחושת מסוגלות גבוהה יותר משמעותית לגבי כפל מאשר לגבי חילוק. ממצאים אלה מצביעים על הצורך בחיזוק הידע והביטחון העצמי לגבי פעולת החילוק, ועשויות להיות להם השלכות על הגישה להכשרה ולהדרכה של מורים למתמטיקה.

מילות מפתח: ידע תוכני, ידע פדגוגי תוכני, תחושת מסוגלות, חינוך מיוחד, כפל, חילוק

* המחקר זכה לאישור ולתקצוב, וכן לליווי ולייעוץ סטטיסטי של רשות המחקר במכללת סמינר הקיבוצים.

מבוא

מהו הידע הנדרש למורים למתמטיקה? בעשורים האחרונים מנסים חוקרים שונים להגדיר את מהות הידע הנדרש להוראה ואת מרכיביו. טענה רווחת היא, שלהוראה יעילה של מתמטיקה נדרשים בין השאר שני סוגי ידע: (1) ידע תוכני – ידע של תחום התוכן, ובעיקר הידע לפתור, ידע של מושגים, חוקים ואקסיומות; (2) ידע פדגוגי – ידע של התוכן הפדגוגי, ובעיקר דרכים לייצוג בעיה, תפיסות של תלמידים ודרכי הוראה לנושא מתמטי.

הידע של מורים למתמטיקה, למגוון מרכיביו, נמצא כגורם המשפיע על תהליכי ההוראה-למידה ועל הישגי לומדים בכלל ובכיתות חינוך מיוחד בפרט (Brownell, 2016; Sindler, Kiely, & Danielson, 2010; Van Inger, Eskelson, & Allsopp, 2016). במחקר הנוכחי נבדק ידע המורים על פי המסגרת התיאורית שהציעה קבוצת חוקרים בראשות דבורה בול (Ball, Thames, & Phelps, 2008). מסגרת זו הגדירה ארבעה רכיבי ידע הנדרשים למורי מתמטיקה: ידע תוכן שגורתי, ידע תוכן ייחודי, ידע של תוכן והוראה וידע של תוכן ותלמידים. הנושא המתמטי שלגביו נבדק הידע במחקר זה הוא פעולות הכפל והחילוק במספרים טבעיים ואפס – נושא מרכזי בתוכניות הלימודים במתמטיקה. על פי תוכנית הלימודים בישראל (משרד החינוך, 2006) וברחבי העולם, ועל פי מחקרים רבים (לדוגמה, Lee, 2007), ההוראה של פעולות הכפל והחילוק בדרכים מגוונות, הדורשת ידע נרחב של מורים, חיונית להעמקת ההבנה של הלומדים. מחקרים אחדים שבדקו ידע מורים בפעולות חשבון (לדוגמה, Sitrava, 2018) מצאו שלמורים ידע רחב יותר לגבי כפל מאשר לגבי חילוק.

מלבד הידע, גורם נוסף שיש בו כדי להשפיע על איכות תהליך ההוראה-למידה מקורו בתחום הרגש: תחושת המסוגלות (self-efficacy) של המורים. הגדרת המונח תחושת מסוגלות היא אמונה של האדם ביכולתו לארגן ולבצע בהצלחה סדרת פעולות הדרושות להשגת תוצאה רצויה (Bandura, 1977, 1986). תחושת מסוגלות נמצאה כגורם נכבד בתפקוד המורה: מחקרים מראים שככל שתחושת המסוגלות של המורה גבוהה יותר, כך משתפר תפקודו ומשתבחת איכות ההוראה שלו (Skaalvik & Skaalvik, 2010).

למיטב ידיעתנו, עדיין לא נבדקו בשיטתיות מרכיבי הידע ותחושת המסוגלות לגבי ידע זה בקרב מורי החינוך המיוחד, מתוך התמקדות בפעולות הכפל והחילוק. בחרנו אפוא להתמקד בבדיקה שיטתית של מרכיבי ידע שונים ובתחושת הביטחון

של המורים לגבי ידע זה בקרב מורי מתמטיקה לתלמידים עם לקויות למידה. במחקר נערכה השוואה בין הידע ותחושת המסוגלות של המורים בהתייחס לפעולת הכפל לבין אלו שבהתייחס לפעולת החילוק.

רקע תיאורטי

הידע הנדרש להוראת מתמטיקה

בעשורים האחרונים מושקע מאמץ מחקרי רב בהגדרת מרכיבי הידע הנדרשים להוראה בכלל, ולהוראת מתמטיקה בפרט (Ball et al. 2008; Shulman, 1986). במסמך סטנדרטים למורי מתמטיקה בארצות הברית צוין כי להוראה יעילה של מתמטיקה נדרש בין השאר ידע מעמיק של התוכן המתמטי, ידע מעמיק של מטרות תוכנית הלימודים וכן ידע הקשור באתגרים העומדים בפני התלמידים בלימוד המתמטיקה; מה הם כבר יודעים ומה הם צריכים ללמוד, באילו חוליות בלימוד הם נוטים לקושי בתפיסה ובהבנה, מהן תפיסותיהם הנכונות והשגויות, ומהן הדרכים לגישור על אי-ההבנות של תלמידים (NCTM, 2000).

לי שולמן, מבכירי החוקרים שתורמו להגדרת הידע הנדרש להוראה, המשיג ידע זה כשילוב של ידע תוכן וידע פדגוגי (Shulman, 1986, 1987). שולמן מונה שני מרכיבים עיקריים הגלומים בידע הנדרש להוראה:

- **ידע של תחום התוכן** (Subject Matter Knowledge, SMK) – בהקשר של הוראת המתמטיקה מדובר בידע של מושגי יסוד, מבנה הידע ועובדות דיסציפלינריות, ובהן הגדרות, חוקים ומשפטים ואקסיומות.
- **ידע פדגוגי תוכני** (Pedagogical Content Knowledge, PCK) – מכיל מרכיבים המקשרים בין ידע התוכן לבין פדגוגיה. בהקשר של הוראת המתמטיקה מדובר לדוגמה בדרכי הצגתו של רעיון מתמטי, בבחירת דרך ההמחשה המתאימה להוראת הנושא, בקיאות באנלוגיות מתמטיות, דוגמאות והדגמות מתמטיות, הסברים מתמטיים, תפיסות נכונות ומוטעות של תלמידים, וידע בנוגע לקשיים אופייניים ולתחומים המעוררים קשיים מסוימים, הן בקרב כלל התלמידים והן לפי שכבות גיל וכן הרקע שעמו מגיעים התלמידים ללמידה (Shulman 1986, p. 9-10).

תרומתו העיקרית של שולמן היא בהגדרת ידע פדגוגי תוכני. סוג ידע זה עורר עניין רב, ועסקו בהגדרתו חוקרים רבים. קבוצת חוקרים (Ball & Bass, 2003; Ball et)

את מרכיבי הידע שטבע שולמן בהתייחס למתמטיקה. חוקרים אלה המשיכו את עבודתו של שולמן והגדירו שני מרכיבים של ידע תוכני: ידע תוכן שגרת וידע תוכן ייחודי, ושני מרכיבים של ידע פדגוגי תוכני: ידע של תוכן ותלמידים וידע של תוכן והוראה, כמפורט להלן:

- **ידע תוכן שגרתי** (Common Content Knowledge, CCK) – מרכיב ידע מתמטי הנדרש גם למי שאינם מורים. לדוגמה, ידע לפתור או לחשב וכן ידע הנדרש לפתרון בעיות מתמטיות.
- **ידע תוכן ייחודי** (Specialized Content Knowledge, SCK) – ידע ומיומנות מתמטית ייחודיים להוראה. לדוגמה, בחינת דרכי פתרון לא־שגרתיות לבעיה ופתרון בעיה במגוון דרכים.
- **ידע של תוכן והוראה** (Knowledge of Content and Teaching, KCT) – שילוב ידע בתחום התוכן עם הוראה. כך לדוגמה, אילו דוגמאות מתאימות להצגת נושא, אילו דוגמאות יעילות להעמקת התוכן הנלמד, הערכת משימות, יתרונותיהן וחסרונותיהן, וכן היכרות עם דרכי ייצוג שונות לבעיות.
- **ידע של תוכן ותלמידים** (Knowledge of Content and Students, KCS) – שילוב ידע של תחום התוכן עם היכרות עם תלמידים. לדוגמה, שגיאות נפוצות של תלמידים, היכרות עם סיבות אפשריות לשגיאות תלמידים וכן זיהוי נקודות תורפה או חוזקות בקרב אוכלוסייה מסוימת של לומדים.

מחקרים שבדקו ידע תוכן וידע פדגוגי של מורים מצאו כי ככל ששני סוגי ידע אלה של המורים היו רחבים יותר, כך גברה הצלחת תלמידיהם (Tchoshanov, 2011). גם בכיתות חינוך מיוחד נמצאה חשיבות רבה לידע המורים: מחקרים שבדקו מרכיבי ידע של מורים למתמטיקה בכיתות חינוך מיוחד מצאו מתאם בין איכות ההוראה של המורים לבין הידע התוכני והפדגוגי שלהם בתחום הדעת – ככל שלמורים היה ידע רחב יותר, כך עלה בידם לספק מענה טוב יותר לקשיי התלמידים, הם הכינו תוכניות התערבות יעילות יותר ותלמידיהם הצליחו יותר (Bronwell et al., 2010; Van Inger et al., 2016).

תחושת מסוגלות

המונח תחושת מסוגלות (self-efficacy) שטבע אלברט בנדרה (Bandura, 1977, 1986) הוגדר במקור: אמונה של אדם ביכולתו לארגן ולבצע בהצלחה סדרת פעולות הדרושה לשם השגת תוצאה רצויה. בנדרה טען כי לשם ביצוע אפקטיבי של מטלה דרושים לאדם הן הכישורים המתאימים והן האמונה והביטחון ביכולתו להפעילם באופן הנדרש. תחושת מסוגלות משפיעה על התנהלותו של האדם ועל תפקודו, ויש לה השפעה ישירה על בחירת דרכי הפעולה, על המאמץ שיידרש מהאדם ועל משך הזמן שישקיע בניסיון לבצע משימה מסוימת. ככל שתחושת המסוגלות שלו גבוהה יותר, כך הוא יתמיד במאמץ ובעשייה (Bandura et al., 2003).

תחושת מסוגלות היא גורם שיש בו כדי להשפיע על תהליך ההוראה-למידה, מכיוון שהן תפקוד המורה והן תפקוד התלמיד בכיתה עשויים להיות קשורים ברמת הביטחון שכל אחד מהם חש ביחס למסוגלותו למלא את תפקידו בהצלחה (Dellinger et al., 2008). מחקרים מצאו מתאם שלילי בין תחושת המסוגלות של מורה לבין מבחר גורמים: ככל שתחושת מסוגלותו של המורה נמוכה יותר, כך גוברות רמת השחיקה שלו, רמת הניתוק שלו מהלומדים וחוסר האמונה שלו ביכולותיהם. ולהפך: ככל שתחושת מסוגלותו של המורה גבוהה יותר, כך הוא יחוש סיפוק רב יותר בעבודתו, יהיה מעורב בהכנת תוכניות לימוד אישיות לתלמידים וישתף פעולה עם הורים ועם עמיתים (Brouwers & Tomic, 2000; Sarıçam & Sakız, 2014). גם בנוגע למסגרות החינוך המיוחד נמצא כי ככל שתחושת המסוגלות של המורה גבוהה יותר, כך משתפר תפקודו (Allinder, 1994): המורה נמצא פתוח יותר לדרכי הוראה מגוונות, יחסיו עם תלמידיו טובים יותר והוא נהנה ונלהב יותר ללמד.

כפל וחילוק במספרים טבעיים

כפל וחילוק הם חלק חשוב בהוראה של המספרים הטבעיים והפעולות בהם, ובהתאם אלה הם נושאים מרכזיים בתוכניות הלימודים למתמטיקה בבתי הספר. בהוראת הנושא נכללות משמעות הפעולות, שליטה בעובדות הכפל והחילוק במסגרת לוח הכפל, שימוש בחוקי פעולה (חילוף, קיבוץ ופילוג) ולימוד האלגוריתמים של הכפל והחילוק המבוססים על המבנה העשרוני ועל חוקי פעולה. במבוא לתוכנית הלימודים במתמטיקה בישראל לבתי הספר היסודיים (משרד החינוך, 2006)

ובמסמך ההתאמות לחינוך המיוחד (משרד החינוך, 2014), מודגש שבתהליך הוראת הכפל והחילוק יש לעסוק בפיתוח מיומנויות חישוב לצד עידוד התובנה המספרית, המתבטאת בין השאר במבחר אסטרטגיות פתרון ובהבנת דרכי פתרון שונות. כל אלה ממחישים את חשיבותם של מרכיבי הידע של המורה – ידע תוכני ופדגוגי-תוכני של המורים.

גם מסמך ההתאמות של תוכנית הלימודים במתמטיקה לתלמידי החינוך המיוחד מכווין את המורים לאסטרטגיות פתרון שונות. מצוין בו כי מכיוון שניתן להניח שתלמידים שונים ישתמשו באסטרטגיות שונות, על המורה לבדוק אם האסטרטגיה שנקט התלמיד יעילה ולעודד אותו להשתמש באסטרטגיות נוספות. מחברי המסמך מציינים, כי לתלמידים בכיתות החינוך המיוחד יש קשיים שונים ומדגישים כי על המורה לאפשר לתלמידים חקר, בחינת דרכים שונות לפתרון והבניית הידע בהתייחס לעובדות הכפל והחילוק.

הדרישות של תוכניות הלימודים מחייבות את המורים להיות בעלי ידע רחב, שכן לצד הלמידה האלגוריתמית הטכנית עליהם לקדם הוראה המובילה להבנה של נכונות האלגוריתם וליצירת קשרים ותהליכים בלמידה. אחד האתגרים המרכזיים בהוראת מתמטיקה הוא שימוש בדרכי הוראה המפתחות חשיבה עצמאית, חקירה וגילוי – תוך טיפוח היבטים מוטיבציוניים בלמידה ובהם עניין, סקרנות ומסוגלות עצמית. הצגת דרכי פתרון מגוונות ולמידה המאפשרת לתלמיד חקר ופיתוח דרכי פתירה מקוריות יהפכו את התלמיד למעורב בתהליך הלמידה, יתרמו לביטחונו ביכולותיו ויובילו ללמידה משמעותית. למורים החסרים את הידע הנדרש לכך הוראה כזאת היא בגדר אתגר. אתגר זה עוד מועצם בקרב תלמידי החינוך המיוחד, מכיוון שמתווספת אליו התמודדות עם לקויות הלמידה של התלמידים. מורים המכירים מגוון דרכים להוראה ומודעים לשגיאות נפוצות של לומדים יכולים לבנות הוראה דיפרנציאלית ולסייע לתלמידים בכיתות החינוך המיוחד להכיר דרך פתרון המתאימה להם וכך לעקוף את הקשיים. כדי לעמוד בדרישות התוכנית ולהתמודד עם אתגרים אלה צריך המורה להכיר דרכים שונות לפתרון משימות מתמטיות (KCT), להיות בעל יכולת לשפוט דרכי פתרון לא־שגרתיות (SCK), להכיר תפיסות של תלמידים ולדעת לכוון תלמידים ברמות שונות לדרכים שונות (KCS).

במחקר שבדק ידע מתמטי של תלמידים וגם של מוריהם נמצא קשר בין דרך ההוראה של המורים לבין הישגי התלמידים: התלמידים הצליחו יותר כשלמדו עם

מורים בעלי ידע רחב, שהסבירו את משמעות האלגוריתם, ולא רק את יישומו באופן טכני (Ma, 1999). ממחקר נוסף עלה, כי כשמורה ידע מדוע הדרך לפתרון הבעיה היא דרך נכונה, וכשמורה ידע יותר מדרך פתרון אחת, התלמידים התגלו כבעלי ידע מעמיק יותר, יצרו קשרים בין פעולות למושגים, ותשובותיהם היו מגוונות יותר (Takker & Subramaniam, 2018).

בלימוד הכפל והחילוק ממליצים חוקרים בין השאר על שימוש באמצעים קונקרטיים, כגון משחקים, על מודלים שונים להמחשה ולעבודה ועל הטלת משימות תובנה שונות לצורך הבנת הנושא (Boaler, 2015; Bakker, Heuvel-Panhuizen, 2014; Jong & Magruder, 2014; Lee, 2007; Cimen, 2014; Robitzsch, 2016). בפרט בהתייחס לתלמידי החינוך המיוחד מדגישים החוקרים את חשיבות השימוש באמצעים קונקרטיים, באסטרטגיות פתרון מגוונות ובקישור לחיי היום-יום כדרכי הוראה המעודדות הבנה של הרציונל העומד בבסיס האלגוריתם (Milton, Flores, 2019; Moore, Taylor, & Burton, 2019).

בהתייחס לידע תוכן ותלמידים (KCS) מפורטים במסמך ההתאמות לחינוך המיוחד קשיים אפשריים של תלמידים שהמורה צריך להתחשב בהם בתכנון ההוראה. לדוגמה, נכתב כי מאחר שיהיו תלמידים שיתקשו להתייחס בד בד לשלושת מרכיביו של מצב הכפל – מספר הפריטים בכל קבוצה, מספר הקבוצות השוות ומספר הפריטים בסך הכול – הרי שיש ללמד כל מרכיב בנפרד (משרד החינוך, 2014). חוקרים שבדקו ואפיינו שגיאות של תלמידים בפעולות כפל וחילוק מצאו שגיאות הנובעות מהכללת יתר ומאינטואיציה שגויה, או שגיאות הנובעות משימוש שגוי בחוקים ובאלגוריתמים (Bainbridge, 1981; Radatz, 1997). אפיון שגיאות כאלה והיכרות מוקדמת של המורה עם תפיסות שגויות אפשריות של תלמידים עשויים לסייע בבניית תהליך ההוראה-למידה בכלל ובבניית יחידות הוראה רלוונטיות בפרט.

גם תחושת מסוגלות גבוהה יכולה לסייע למורים להתמודד עם אתגרי ההוראה של נושא הכפל והחילוק בכיתות החינוך המיוחד. כאמור לעיל, מחקרים מצאו מתאם בין תחושת מסוגלות גבוהה של המורה לבין מידת השתתפות גבוהה יותר בהכנת תוכניות לימוד אישיות לתלמידים ומידת פתיחות גדולה יותר לדרכי הוראה מגוונות (Allinder, 1994; Brouwers & Tomic, 2000; Sarıçam & Sakız, 2014). ואולם מחקרים שבדקו ידע מורים בארבע פעולות החשבון מצאו כי למורים ידע חלקי לגבי חילוק, הן ידע תוכני והן ידע פדגוגי: במחקר אחד התקשו מורים להסביר

את אלגוריתם הפתרון לתרגילי חילוק בהתבסס על ערך המקום במבנה העשרוני (Sitrava, 2018). מחקר אחר מצא כי יש מורים המתקשים לפתור בעיות חילוק, וכי רובם התקשו בהסבר האלגוריתם ובבניית פעולות הוראה (Setoromo, Bansilal, & James, 2018).

למיטב ידיעתנו, לא נחקרו בשיטתיות מרכיבי הידע לגבי כפל וחילוק בזיקה לתחושת המסוגלות בקרב מורים בחינוך המיוחד. מכאן נגזרת מטרת המחקר הנוכחי.

מטרת המחקר

לבדוק בקרב מורי החינוך המיוחד לתלמידים עם לקויות למידה את ההבדלים בין רמת הידע ותחושת המסוגלות של מורים בהתייחס לכפל, לבין רמת הידע ותחושת המסוגלות שלהם בהתייחס לחילוק.

שאלות המחקר

- מהו הידע של מורים למתמטיקה המלמדים תלמידי חינוך מיוחד עם לקויות למידה בנושא כפל וחילוק, בחלוקה לפי ארבעת סוגי הידע:
 - ידע תוכן שגרתי
 - ידע תוכן ייחודי
 - ידע של תוכן והוראה
 - ידע של תוכן ותלמידיםכל זאת בהתייחס לתרגילים במסגרת לוח הכפל ומעבר ללוח הכפל.
- מהי הרמה של תחושת המסוגלות של המורים ביחס לידע שלהם, כפי שמשקפת במידת הביטחון שלהם:
 - להשיב נכונה על תרגילי כפל ועל תרגילי חילוק.
 - להשיב נכונה על תרגילי כפל ועל תרגילי חילוק ביותר מדרך אחת.
 - להציג דרך הוראה או המחשה לתרגילי כפל ובתרגילי חילוק.
 - לצפות מראש שגיאות של תלמידים בתרגילי כפל ובתרגילי חילוק.כל זאת בהתייחס לתרגילים במסגרת לוח הכפל ומעבר ללוח הכפל.

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר: במחקר השתתפו 64 מורים למתמטיקה המלמדים כפל וחילוק במספרים טבעיים בכיתות החינוך המיוחד לתלמידים עם לקויות למידה, בכיתות קטנות במסגרת החינוך הרגיל. כל המורים שהשתתפו במחקר מלמדים בחינוך הממלכתי במגזר היהודי. למורים אלה תואר ראשון בחינוך מיוחד, מגוון שנות ותק בהוראת מתמטיקה – משנת ותק אחת ועד 35 שנות ותק – והם בוגרי סוגים שונים של מסגרות הכשרה להוראת המתמטיקה: 29 מהם התמחו בהוראת המתמטיקה במסגרת לימודיהם לתואר הראשון; 19 מורים הוכשרו להוראת המתמטיקה במסגרות הדרכה והשתלמויות; ו-16 המורים הנוותרים אינם בעלי הכשרה מיוחדת בהוראת מתמטיקה.

איתור המורים נעשה על ידי פנייה למתי"א (מרכזי תמיכה יישוביים או אזורים), למדריכים ולרכזי מקצוע המתמטיקה וכן למנהלים בבתי ספר. ההשתתפות הייתה בהתנדבות ובהסכמה. המדגם, לרבות פילוח אוכלוסיית המורים שבו לפי ותק והכשרה אין בו כדי לייצג בהכרח את המצב בישראל.

כלי המחקר: שני שאלונים, שאלון ידע ושאלון תחושת מסוגלות שפיתחו עורכות המחקר למטרת מחקר זה. תיקוף השאלונים נעשה בידי שלושה מומחים להוראת מתמטיקה בחינוך הרגיל ובחינוך המיוחד. במחקר מקדים ענו על השאלונים 12 מורים שנדגמו באותו אופן שנדגמו לאחר מכן המורים שהשתתפו במחקר. לאחר המבחן המקדים בוצע מקצה שיפורים בשאלון והוסרו שאלות שלא התקבלה בהם רמת מהימנות מתאימה. לגבי השאלות האחרות שנותרו בשאלון נבדקה והושגה רמת מהימנות מתקבלת על הדעת במבחן אלפא של קרונברך עם ערך גדול מ-0.7. שאלון הידע, המונה 24 פריטים פתוחים, בדק את ידע המורים בארבעת מרכיבי הידע שהגדירו בול ואח' (Ball et al., 2008) בנושאים כפל וחילוק במספרים אי-שליליים באופן הבא: לשם בדיקת ידע תוכן שגרתי התבקשו המורים לפתור תרגילי כפל ותרגילי חילוק על ידי חישובים, הן במסגרת לוח הכפל והן מעבר ללוח הכפל. לצורך בדיקת ידע תוכן ייחודי, המורים התבקשו לפתור תרגיל בדרך נוספת או לאמור תוצאת תרגיל בלי לפתור אותו. לבדיקת ידע של תוכן והוראה המורים התבקשו להציג דרך להוראה או להמחשה של תרגיל מסוים. לבדיקת ידע של תוכן ותלמידים התבקשו המורים לתאר שגיאות אופייניות של תלמידים בפתרון תרגיל או להסביר את הסיבות לשגיאות אופייניות של תלמידים.

השאלון לבדיקה של תחושת המסוגלות מנה 24 היגדים שהמורים התבקשו לדרג על פי מידת הביטחון שלהם בביצוע הפעולה המתוארת בהיגד, בסולם שבין 1 (לא בטוח כלל) לבין 5 (בטוח מאוד). לכל שאלה בשאלון הידע התוכני והידע הפדגוגי-תוכני הוצג היגד מתאים בשאלון תחושת המסוגלות. בטבלה 1 מוצגות דוגמאות לפריטים משני השאלונים.

טבלה 1: דוגמאות לפריטים תואמים משני שאלוני המחקר

השאלון סוג הידע	שאלון הידע	היגד תואם מתוך שאלון תחושת המסוגלות: "דרג את מידת הביטחון שלך..."
ידע תוכן שגרת ¹	פתור את התרגיל: $9 \times 7 =$	לפתור תרגילי כפל במסגרת לוח הכפל
ידע תוכן ייחודי ²	פתור בשתי דרכים את התרגיל: $1407 : 7 =$	לפתור תרגילי חילוק מעבר ללוח הכפל ביותר מדרך אחת
ידע של תוכן והוראה ³	תאר את דרך ההוראה שלך לתרגיל: $29 \times 58 =$	להורות את אלגוריתם הכפל לתרגילים מעבר ללוח הכפל
ידע של תוכן ותלמידים ⁴	הצג שתי שגיאות אופייניות לתלמידים בפתרון התרגיל: $48 : 6 =$	לצפות מראש שגיאות של תלמידים בפתרון תרגילי חילוק במסגרת לוח הכפל

1 Common Content Knowledge, CCK

2 Specialized Content Knowledge, SCK

3 Knowledge of Content and Teaching, KCT

4 Knowledge of Content and Students, KCS

לכל שאלת ידע והיגד מתאים בהקשר לפעולת הכפל הוצגה שאלת ידע והיגד מקבילים בהקשר של פעולת החילוק. בניתוח הממצאים נבדקו ההבדלים בין כפל לבין חילוק.

מהלך המחקר

כל מורה שהביע את הסכמתו להשתתף במחקר מילא את שלושת שאלוני המחקר בסדר הזה: (1) שאלון פרטים אישיים; (2) שאלון תחושת מסוגלות (מכונה גם שאלון "חוללות עצמית"); (3) שאלון ידע מתמטי ופדגוגי. הרציונל לקביעת סדר העברת השאלונים נקבע כדי להימנע מהשפעה של שאלון הידע על רמת הביטחון של המורים וכדי להימנע ככל האפשר מהטיה ומחוסר אובייקטיביות במילוי שאלון תחושת המסוגלות.

עיבוד הנתונים כלל בין השאר כלי סטטיסטיקה תיאורית לתיאור מגמות כלליות של הנתונים, לצד מבחנים סטטיסטיים כגון מבחני T, χ^2 בריבוע ו-ANOVA. בעיבוד הנתונים הכולל בוצעו השוואות בין ממצאים של סוגי הידע השונים, בין הפעולות למיניהן, בין סוגי תרגילים ובין קבוצות אוכלוסייה שונות לפי מאפיינים דמוגרפיים. מטעמים של אתיקה מקצועית, הנתונים עובדו סטטיסטית בלבד, מתוך שמירה על אנונימיותם של המורים שהשתתפו במחקר וחסינו פרטים בנוגע למקום עבודתם. עורכות המחקר התחייבו בפני המורים כי הנתונים שנאספו ישמשו אך ורק לצורך מחקר זה, ולא יועברו לשום גורם אחר.

ממצאים

במאמר זה מוצגים ממצאים מ-16 שאלות מכל שאלון (8 שאלות כפל ו-8 שאלות חילוק), המייצגים את ממצאי השאלון כולו, ובהם תרגילים משני סוגים: (1) תרגילים המשלבים חישובים במסגרת לוח הכפל; (2) תרגילים המשלבים חישובים מעבר ללוח הכפל. במוקד הממצאים – ההבדלים במאפיינים שנבדקו בין כפל לחילוק.

ממצאי שאלון הידע

בדיקת שאלון הידע מעלה כי בחלק ניכר של השאלות נמצאו הבדלים ניכרים בין ידע המורים לגבי כפל לבין הידע שלהם לגבי חילוק. בטבלה 2 מוצג חלקם של המורים שהשיבו נכונה על שאלות הידע, כלומר פתרו נכונה את התרגיל; פתרו נכונה את התרגיל ביותר מדרך אחת; הציגו דרך הוראה לתרגיל נתון מלבד דרך של שינון או פתרון אלגוריתמי; הציגו שתי שגיאות אופייניות של תלמידים בפתרון התרגיל המוכרות בספרות המקצועית. נמצאו הבדלים ברמות הידע שהציגו המורים הן במרכיבי הידע השונים, הן בסוגי התרגילים והן בין כפל לחילוק.

טבלה 2: חלקם של המורים שהשיבו נכונה על שאלות ידע (N=64)

סוג התרגילים	מרכיב הידע	כפל ⁵	חילוק ⁵	הבדלים ⁶
ידע תוכני:				
חישובים במסגרת לוח הכפל	תוכן שגרתי ¹	98%	100%	-0.320‡
	תוכן ייחודי ²	84%	82%	0.551‡
	ידע פדגוגי תוכני:			
	תוכן והוראה ³	76%	65%	2.197†
חישובים מעבר ללוח הכפל	תוכן ותלמידים ⁴	56%	46%	2.308†
	ידע תוכני:			
	תוכן שגרתי ¹	97%	88%	2.226†
	תוכן ייחודי ²	84%	72%	2.212†
חישובים מעבר ללוח הכפל	ידע פדגוגי תוכני:			
	תוכן והוראה ³	56%	53%	1.022‡
	תוכן ותלמידים ⁴	20%	6%	2.181†

1 Common Content Knowledge, CCK

2 Specialized Content Knowledge, SCK

3 Knowledge of Content and Teaching, KCT

4 Knowledge of Content and Students, KCS

5 שיעור המורים שהשיבו נכונה (%)

6 מבחן T

† p<0.05

‡ ההבדל לא נמצא משמעותי סטטיסטית

מהטבלה עולה, כי רוב המורים השיבו נכונה על שאלות התוכן השגרתי ופתרו נכונה את התרגילים. ואולם שיעור הצלחתם בשאלות הידע הפדגוגי – ידע של תוכן והוראה וידע של תוכן ותלמידים – נמוך משמעותית מזה שבשאלות ידע תוכן שגרתי וייחודי: הידע התברר כחלקי הן בהתייחס להוראת התרגילים (KCT) והן בהתייחס לשגיאות אופייניות של תלמידים (KCS). הממצא המרכזי הוא הפער בכל סוגי הידע בין כפל לחילוק: בפריטים רבים נמצאו הבדלים בין כפל לחילוק,

בייחוד במרכיבי הידע הפדגוגי (KCT, KCS), ובעיקר בתרגילים שמעבר ללוח הכפל: שיעורי ההצלחה של המורים בחלק מהשאלות גבוהים בכפל מאשר בחילוק. המורים הציגו יותר דרכי הוראה והמחשה, הכירו יותר שגיאות אופייניות של תלמידים והיטיבו לציין את הסיבות לשגיאות אלה בתרגילי כפל מאשר בתרגילי חילוק.

הדוגמאות שלהלן לתשובות המורים ממחישות את ההבדלים שנמצאו בין כפל לבין חילוק בהתייחס לידע של תוכן והוראה (KCT): ניתנו למורים שני תרגילים במסגרת לוח הכפל: 9×7 ו- $48:6$, והם התבקשו להציג דרך להוראה ודרך להמחשה כל אחד מהתרגילים. לתרגיל הכפל הציעו המורים מגוון רחב יותר של דרכים להוראה ולהמחשה מאשר לתרגיל החילוק. 76% מהמורים ציינו דרך הוראה ודרך המחשה לתרגיל הכפל, מלבד שינון בעל-פה של לוח הכפל, והציעו את דרכי ההוראה וההמחשה שלהלן, המדגישות חלק ממשמעות הכפל:

- שימוש במשמעות הכפל כחיבור חוזר של מחוברים שווים, במגוון ייצוגים, כשגורם אחד מתאר את מספר הפריטים בכל קבוצה, הגורם השני מתאר את מספר הקבוצות השוות, והמכפלה היא מספר הפריטים הכולל של כל הקבוצות. דרך זו יכולה להיות מוצגת:

א. בתרגיל: לדוגמה, 9 פעמים 7 יוביל לתרגיל: $7+7+7+7+7+7+7+7+7$ או 7 פעמים 9 יוביל לתרגיל: $9+9+9+9+9+9+9+9+9$

ב. בסיפור חשבוני הממחיש שיש כמה קבוצות שבכל אחת מהן אותו מספר פרטים: לדוגמה, לאימא יש 7 שקיות. בכל אחת מהשקיות יש 9 עוגיות. כמה עוגיות יש לאימא?

ג. במודלים קונקרטיים: לדוגמה, הצגת 7 קבוצות של 9 קוביות או פקקי בקבוקים בכל אחת מהקבוצות.

ד. במודל מצויר: לדוגמה, ציור של 9 מלבנים, שבכל אחד מהם יש 7 עיגולים. ה. התייחסות למשמעות הכפל כאל שטח מלבן המוגדר ביחידות אורך של שתיים מצלעותיו הסמוכות. המלבן כולו מחולק לריבועים שווים בגודלם, כך שמהכפלת יחידות האורך המגדירות את שתי הצלעות הסמוכות יתקבל מספר היחידות המרכיבות את המלבן. ייצוג לדוגמה של מודל המקשר בין שטח מלבן לכפל הוא מלבן (או טבלה) הבנוי מ-7 שורות ו-9 עמודות.

- שימוש בחוקי פעולה, פילוג אחד הגורמים לסכום או הפרש נוח יותר להכפלה. לדוגמה, פילוג בחיסור: $7 \times 9 = 7 \times (10 - 1) = 7 \times 10 - 7 \times 1 = 70 - 7 = 63$

- שימוש בתרגיל עזר קל יותר לחישוב היכול לשמש כתומך זיכרון לשליפת המכפלה. לדוגמה, פירוק 9 ל- 3×3 וקבלת התרגיל $7 \times 9 = 7 \times 3 \times 3 = 21 \times 3 = 63$ ולחלופין, על ידי חיבור או חיסור קבוצה למספר ריבועי קרוב: פתרון התרגיל 7×9 יהיה על ידי התרגיל 7×7 והוספת שתי קבוצות של 7.
- הצגת משחקים לתרגול יעיל ומהנה של משמעותיות הכפל והמחשת עובדות ועקרונות הכפל, ובכלל זה תרגול רב של חישובים המעודדים יעילות בחישוב. לדוגמה, השלמת קבוצות שוות או ארגון מערכי כפל, ולשינון העובדות, כגון שירי כפל שמוצגים בהם סדרת עובדות הכפל ב-7 או ב-9.
- שימוש בתכונות מיוחדות של סדרת כפולות ה-9: ספרת היחידות בכפולה קטנה ב-1, בעוד שספרת העשרות גדלה ב-1; סכום הספרות הוא תמיד 9.

עם הדרכים שהציעו המורים נמנות דרכים המומלצות בספרות המקצועית, המשלבות קישור לחיי יום-יום, המחשות קונקרטיות, מודלים שונים וחיוזוק חוקי פעולה וחשבון.

לעומת זאת, בתרגיל החילוק 48:6 רק 65% מהמורים ידעו לציין דרכי הוראה והמחשה מלבד שינון בעל-פה של לוח הכפל. ההצעות של המורים היו:

- שימוש במשמעות פעולת החילוק, כחילוק לחלקים שווים, באמצעות:
 - א. סיפור חשבוני: לדוגמה, 48 סוכריות שעליהם למקם שווה בשווה ב-6 שקיות.
 - ב. מודל מצויר: לדוגמה, שרטוט 6 מלבנים המייצגים קבוצות, ובהם על התלמידים למקם 48 עיגולים שווה בשווה בכל קבוצה.
 - פילוג של המחולק. לדוגמה: $48:6 = (12+36):6 = 12:6 + 36:6 = 2+6 = 8$
 - יצירת קשר בין פעולת החילוק לפעולת הכפל. לדוגמה: היעזרות בכפולות של 6 כדי ליצור משוואה כפלית, ובדיקה עם התלמיד איזו ספרה יש להכפיל ב-6 כדי לקבל 48: $6 \times ______ = 48$ ("מה כפול 6 נותן 48").

אף אחד מהמורים לא הציע דרך הוראה, כגון חיסור חוזר, הנובע מהפיכות הפעולה לכפל, שהוא חיבור חוזר. כמו כן לא הוצגו המחשות קונקרטיות, כגון שימוש בעצמים בדידים המייצגים את המספר הכולל וחלוקתם לקבוצות שוות, אף לא על ידי מורים שהציעו זאת קודם לכן בתרגיל הכפל. המחשות סימבוליות אף הן לא הוצגו, כגון ישר המספרים, שהוא גשר בין השלב המוחשי של המנייה בקפיצות

שוות לבין השלב הפורמלי של כתיבת התרגיל. לא הוצגו משחק או שירים – גם לא על ידי מורים שהציעו זאת בכפל – ואף לא הועלתה הצעה הקשורה לחילוק להכלה, אלא אך ורק הצעות הקשורות לחילוק לחלקים שווים.

דוגמאות אלו ממחישות שלמורים ידע רחב יותר לגבי דרכי הוראת עובדות הכפל מאשר לגבי הוראת עובדות החילוק. ממצא זה בא לידי ביטוי גם בביטחון העצמי של המורים ובתחושת המסוגלות שלהם, כפי שמוצג להלן.

ממצאי שאלון תחושת המסוגלות

בשאלון זה התבקשו המורים לדרג בסולם שבין 1 ל-5 את רמת הביטחון שלהם לבצע מבחר מטלות, לפי סדרת היגדים שהוצגה לפניהם. הדירוג הכללי של רמת הביטחון נמצא גבוה יחסית, בין 3 ל-5. נמצא כי רמת הביטחון של המורים ביחס לידע הפדגוגי נמוכה מאשר ביחס לידע תוכן, וכך גם רמת הביטחון של המורים ביחס לתרגילים שמעבר ללוח הכפל שנמצאה נמוכה מאשר ביחס לתרגילים שבמסגרת לוח הכפל. הממצאים המוצגים בטבלה 3 מעידים כי ביחס לכל ההיגדים שהוצגו בשאלון, לגבי כל סוגי הידע שנבדקו וכל סוגי התרגילים – רמת הביטחון של המורים בידע שלהם לגבי פעולת הכפל גבוהה באורח ניכר מאשר לגבי חילוק. טבלה 3 מדגימה כי רמת הביטחון הגבוהה ביותר בקרב המורים נמצאה ביחס לידע תוכן שגרתי (CCK), ובייחוד בפתירת תרגילי כפל במסגרת לוח הכפל (4.94). רמת הביטחון הנמוכה ביותר נמצאה ביחס לידע פדגוגי של תוכן ותלמידים (KCS), ובייחוד בביטחון לצפות מראש שגיאות של תלמידים בתרגילי חילוק. טבלה 3 מדגימה כי המורים דירגו בעקביות את רמת הביטחון שלהם בכפל בציון גבוה יותר מאשר בחילוק, בכל סוגי הידע ובכל סוגי התרגילים. בהתאם, ממצאי סטיית התקן מעידים כי בהתייחס לחילוק, הדירוג העצמי של המורים מתאפיין ברמת אחדות פחותה ובפיזור רב מאשר בכפל.

לצורך בדיקה מעמיקה יותר של ההבדלים ברמת הביטחון בקרב המורים בין הוראת הכפל להוראת החילוק, בכל סוגי הידע, הוגדרו שישה משתנים, שלושה לכפל ושלושה לחילוק: משתנה 1 – ההיגדים הקשורים לידע תוכן, שגרתי וייחודי, בנוגע לכפל; משתנה 2 – ההיגדים הקשורים לידע לגבי הוראת הכפל; משתנה 3 – ההיגדים הקשורים לידע לגבי תלמידים בפעולת הכפל. כך נעשה גם לגבי חילוק, ובסך הכול כאמור הוגדרו שישה משתנים.

טבלה 3: דירוג רמת ביטחון של המורים בסולם שמ־1 עד 5, על סמך שאלון המסוגלות (ממוצע וסטיית תקן)

סוג התרגילים	מרכיב הידע	כפל ⁵	חילוק ⁵	הבדלים ⁶
ידע תוכני:				
חישובים במסגרת לוח הכפל	תוכן שגרת ¹	4.94 (0.24)	4.80 (0.47)	2.857**
	תוכן ייחודי ²	4.53 (0.90)	4.27 (1.03)	3.401***
	ידע פדגוגי תוכני:			
	תוכן והוראה ³	4.58 (0.77)	4.32 (0.95)	4.138***
	תוכן ותלמידים ⁴	4.12 (0.90)	4.05 (0.90)	2.308*
ידע תוכני:				
חישובים מעבר ללוח הכפל	תוכן שגרת ¹	4.71 (0.58)	4.44 (0.88)	3.432***
	תוכן ייחודי ²	4.55 (0.79)	4.38 (0.89)	3.008**
	ידע פדגוגי תוכני:			
	תוכן והוראה ³	4.55 (0.79)	4.27 (0.99)	4.088***
	תוכן ותלמידים ⁴	3.82 (0.98)	3.78 (1.04)	2.551*

1 Common Content Knowledge, CCK

2 Specialized Content Knowledge, SCK

3 Knowledge of Content and Teaching, KCT

4 Knowledge of Content and Students, KCS

5 ממוצע (סטיית תקן)

6 מבחן T

*p<0.05; **p<0.01; ***p<0.001

לגבי כל משתנה נבדקו ההבדלים בין כפל לחילוק. בכל ההשוואות נמצאו הבדלים משמעותיים: בהתייחס לידע תוכן נמצא כי למורים ביטחון גבוה משמעותית לגבי כפל מאשר לגבי חילוק ($T=4.562$, $p<0.001$). בהתייחס לידע פדגוגי של תוכן והוראה נמצא כי למורים ביטחון גבוה משמעותית לגבי כפל מאשר לגבי חילוק ($T=4.593$, $p<0.001$). כך גם בהתייחס לידע פדגוגי של תוכן ותלמידים – למורים ביטחון גבוה משמעותית לגבי כפל מאשר לגבי חילוק ($T=2.675$, $p<0.01$).

דיון ומסקנות

במחקר זה נבדקו הידע המתמטי, הידע הפדגוגי ותחושת המסוגלות של מורים למתמטיקה ביחס לכפל וחילוק מספרים טבעיים ואפס בכיתות החינוך המיוחד המיועדות לתלמידים עם לקויות למידה. המחקר העלה ממצאים חדשים אחדים וחיידר ממצאים ממחקרים קודמים. החידוש המרכזי במחקר הוא שילוב של בדיקה שיטתית של מרכיבי ידע המורים עם בדיקה של תחושת המסוגלות בהקשר לידע זה. כל זאת במסגרת החינוך המיוחד, שבה לא נבדקו עד כה גורמים אלו ביחס להוראת הכפל והחילוק.

במחקר זה הודגם כי איכות ההוראה של מורים היא פונקציה של הידע שלהם ותחושת המסוגלות שלהם: ידע מתמטי ופדגוגי רחב לצד תחושת מסוגלות גבוהה מאפשרים הוראה משמעותית לכלל התלמידים, ובפרט לאוכלוסיית תלמידי החינוך המיוחד. בהתייחס לתחושת המסוגלות והביטחון של המורים בידע שלהם נמצא הבדל משמעותי באיכות ההוראה בין פעולת הכפל לפעולת החילוק: בכל סוגי הידע שנבדקו, רמת הביטחון של המורים לגבי הוראת הכפל נמצאה גבוהה משמעותית ביחס לרמת הביטחון שלהם ביחס להוראת החילוק. ייתכן שהדבר נובע מקושי בהוראה ובביצוע של תרגילי חילוק ארוך, אלגוריתם המעורר קושי בקרב תלמידים רבים (Lee, 2007). ואולם ממצאי המחקר הנוכחי מצביעים על פערים גם לגבי תרגילים במסגרת לוח הכפל, שעבורם אין שימוש באלגוריתם זה.

הממצאים הנוגעים לידע (תוכני ופדגוגי) של המורים אינם אחדים: עלו הבדלים בין רמות הידע שהציגו המורים במרכיבי הידע השונים. כך, רמת הידע הגבוהה ביותר היא ידע תוכן שגורתי, והנמוכה ביותר – ידע לגבי תלמידים. ביחס לרוב השאלות נמצא כי למורים ידע רחב יותר לגבי כפל מאשר לגבי חילוק, וכי המורים מלמדים בעזרת דרכים והמחשבות, בייחוד בתרגילי עובדות הכפל במסגרת לוח הכפל. ייתכן שבהוראת החילוק מסתמכים רוב המורים יתר על המידה על האלגוריתם, וחלקם על הקשר בין החילוק לכפל כפעולות הפוכות. ממצא זה מחזק ומחדר ממצאים דומים בספרות המחקרית, שעל פיהם למורים חסר ידע פדגוגי לגבי חילוק (Sitrava, 2018), ושבהוראת חילוק נסמכים מורים על כפל (Downton, 2013).

בספרות המקצועית מודגשת החשיבות של ידע מורים בכלל ושל ידע פדגוגי תוכני בפרט, בדגש על המחשבות ועל ייצוגים התורמים להבנה (Milton et al.,

(2019), בייחוד לתלמידים עם לקויות למידה. הידע הפדגוגי של המורים שהשתתפו במחקר הנוכחי נמצא חלקי, עובדה שיש בה כדי להשפיע לרעה על תהליך הלמידה של תלמידיהם. הידע החלקי והלוקה ביותר בחסר נמצא במרכיבי הידע הפדגוגי, ובייחוד בידע של תוכן ותלמידים. ייתכן כי ממצא זה נובע מהעובדה שבמדגם שולבו גם מורים חסרי הכשרה ייעודית בהוראת מתמטיקה וכן מורים בעלי ותק מועט. מורים אלה הם חלק מאוכלוסיית המורים המלמדים מתמטיקה במסגרות החינוך המיוחד, ועל כן חשוב לבדוק את הידע שלהם ואת תחושת המסוגלות שלהם. ממצאים אלו מאששים ומדגישים המלצות שהתקבלו במחקרים קודמים (Van Inger et al., 2016) לגבי חשיבות ההדרכה והליווי של מורים חדשים.

למחקר הנוכחי עשויה להיות תרומה ניכרת הן במישורי התיאורטי והן במישור היישומי, בזכות הרחבת תשתית הממצאים בנוגע לידע ולתחושת המסוגלות של מורי חינוך מיוחד למתמטיקה המלמדים כפל וחילוק של מספרים טבעיים ואפס. מכיוון שנמצאו חוסרי ידע ספציפיים בסוגי ידע מסוימים ובסוגי תרגילים מסוימים, יש במחקר זה בסיס להבניית תוכניות התערבות לקידום חוסרי הידע שנמצאו – ידע תוכן וידע פדגוגי-תוכני – של מורים, מתוך התייחסות לתחושת המסוגלות שלהם ולהעצמתה.

מגבלות המחקר: במישור המעשי – המחקר לא בדק את הקשר בין ידע המורים לידע תלמידיהם. מוצע לערוך מחקר המשך שיבדוק קשר כזה. במישור המתודולוגי – המדגם נבנה באופן התנדבותי אקראי, על בסיס רצון טוב של מורים, וספק אם הוא מייצג את אוכלוסיית המורים במדינה. מוצע לערוך מחקר מקיף יותר ולדגום באופן מייצג את פילוח המורים בישראל.

מקורות

משרד החינוך והתרבות (2006). תוכנית לימודים במתמטיקה לכיתות היסוד לכל המגזרים בישראל: מבוא. ירושלים: ת"ל.

משרד החינוך והתרבות (2014). מסמך התאמת תוכנית הלימודים במתמטיקה של בית הספר היסודי לתלמידי החינוך המיוחד בישראל. ירושלים: ת"ל. נדלה מתוך:

http://meyda.education.gov.il/files/Mazkirut_Pedagogit/matematika/mismach_hatamot.pdf

Allinder, M. R. (1994). The relationship between efficacy and the instructional practices of special education teachers and consultant. *Teacher Education and Special Education*, 17(2), 86-95.

- Bakker, M., Heuvel-Panhuizen M., & Robitzsch A. (2016) Effect of mathematics computer games on special education students' multiplication reasoning and ability. *British Journal of Educational Technology*, 47(4), 633-648.
- Ball, D. L., Thames M. H., & Phelps G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis, & E. Simmt (Eds.), *Proceeding of the annual meeting of the Canadian mathematics education study group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG.
- Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review*, 84(2), 191-215.
- Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Bandura, A., Caprara G. V., Barbaranelli C., Gerbino M., & Pastorelli C. (2003). Role of affective self-regulatory efficacy in diverse spheres of psychosocial functioning. *Child Development*, 74(3), 769-782.
- Bainbridge, R. (1981). To err is human: Towards a more positive approach to young children's mistakes in arithmetic. *Mathematics in School*, 10, 10-13.
- Boaler, J. (2015) *Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts*. Stanford, CA: YouCubed Program.
- Brouwers, A., & Tomic, W. (2000). A longitudinal study of teacher burnout and perceived self-efficacy in classroom management. *Teacher and Teaching Education*, 16(2), 239-253.
- Brownell, M. T., Sindelar, P. T., Kiely, M. T., & Danielson, L. C. (2010). Special education teacher quality and preparation: Exposing foundations, constructing a new model. *Exceptional Children*, 76(3), 357-377.
- Cimen, O. A. (2014). How do children multiply: Reflections and prospective pedagogical implications. *Procedia*, 159, 593-597.
- Dellinger, A., Bobbett, J., Olivier, D., & Ellett, C. (2008). Measuring teachers' self-efficacy beliefs: Development and use of the TEBS self. *Teaching and Teacher Education*, 24(3), 751-766.
- Downton, A. (2013). Making Connections between multiplication and division. Mathematics Education Research Group of Australasia, Paper presented at the Annual Meeting of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).

- Hill, H. C., Ball D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical concept knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic specific knowledge for students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Jong, C., & Magruder, R. (2014). Beyond Cookies: Understanding various division models. *Teaching Children Mathematics*, 20(6), 366-373.
- Lee, J. E. (2007). Making sense of the traditional long division algorithm. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 48-59.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Milton, J. H., Flores, M., Moore, A. J., Taylor, J., & Burton, M. E. (2019). Using the concrete representational abstract sequence to teach conceptual understanding of basic multiplication and division. *Learning Disability Quarterly*, 42(1), 32-45.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, NCTM.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 163-171.
- Sarıçam, H. & Sakız, H. (2014). Burnout and teacher self-efficacy among teachers working in special education institutions in Turkey. *Educational Studies*, 40(4), 423-437.
- Setoromo, M., Bansilal, S., & James, A. (2018). Lesotho grade R Teachers' mathematical knowledge for teaching numeracy. *South African Journal of Childhood Education*, 8(2), 1-9.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-21.
- Sitrava, T. R. (2018). An investigation of prospective mathematics teachers' knowledge of basic algorithms with whole numbers: A case of Turkey. *European Journal of Educational Research*, 7(3), 513-528.
- Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S. (2010). Teacher self-efficacy and teacher burnout: a study of relations. *Teacher and Teacher Education*, 26(4), 1059-1069.

- Takker, S., & Subramaniam, K. (2018). Teacher knowledge and learning "in-situ": A case study of the long division algorithm. *Australian Journal of Teacher Education*, 43(3), 1-20.
- Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 76(2), 141-164.
- Van Inger, S., Eskelson, S. L., & Allsopp, D. (2016). Evidence of the need to prepare prospective teacher to engage in mathematics consultations. *Mathematics Teacher Education and Development*, 18(2), 73-91.

