

דרכים שונות להקניית מושגים חדשים בגאומטריה של המרחב

תקציר: התודעות לדרכים שונות להקניית מושגים בכל תחום דעת נלמד היא אחד מתפקידיו של כל מורה, ובייחוד מורים למתמטיקה. מחקרים מצביעים על טעויות ועל קשיים בהקניית מושגים במתמטיקה ובלמידתם. למושגים רבים מובנים שונים בהקשרים שונים. לכן יש להידרש לדימוי המושג מתוך תשומת לב למהות המושג, וכן לתפיסות מוטעות המתפתחות תוך כדי הקניית המושג. במאמר זה מתוארת פעילות שנעשתה עם 28 מורים הלומדים לתואר שני בחינוך מתמטי במכללה להכשרת מורים, במסגרת קורס בהנדסת המרחב, תחום שנתפס כקשה במיוחד ללומדים אותו. הפעילות מתמקדת בשתי דרכים להקניית מושג בגאומטריה של המרחב, "זווית בין פאה צדדית לבסיס פירמידה", כאחד האמצעים לפיתוח התפיסה המרחבית. בסיכום הפעילות מובאות תגובות המשתתפים על היתרונות של כל אחת מהדרכים שהתנסו בהן והמלצותיהם בנוגע לדרך המועדפת עליהם להקניית מושגים גאומטריים חדשים.

מילות מפתח: דרכים שונות להקניית מושגים, מהתנסות להגדרה, מהגדרה להתנסות, זווית בין פאה צדדית לבסיס פירמידה.

רקע תאורטי

למושגים רבים במתמטיקה מובנים שונים בהקשרים שונים (Patkin, 2011). בסדרת מחקרים בנושא למידת מושגים בגאומטריה של המישור והמרחב (Hershkowitz & Vinner, 1983; Ben-Chaim et al., 1989; Hershkowitz, 1990) נמצא כי תלמידים בבית הספר היסודי, ואף בבית הספר התיכון, מתקשים בוויזואליזציה ובמעברים מצורות תלת-ממדיות לצורות דו-ממדיות ולהפך. קושי זה קיים גם אצל מבוגרים (ברקאי ופטקין, 2012). קשה לתאר צורות תלת-ממדיות בשרטוט שהוא דו-ממדי. יש קושי גם לתאר ולהמליל את אותה צורה. גם תיאור של צורה תלת-ממדית על סמך התבוננות באותה צורה במרחב אינו פעולה קלה. בתהליך רכישת המושגים יש אלמנטים חזותיים המשפיעים על הלומדים. חלק מתכונות המושג הן קריטיות לקיום אותו מושג, והן חייבות להתקיים בכל צורה או ייצוג של אותו מושג. תכונות אחרות, הנקראות תכונות אי-קריטיות, לא חייבות להיות בכל דוגמה של המושג, ולכן שגוי לשייך אותן כתכונה הכרחית לתיאור אותו מושג (Hershkowitz, 1990). במתמטיקה לכל

מושג שאינו מושג ראשוני יש הגדרה. בהגדרה זו מצוינות התכונות המאפיינות את אותו מושג. ההגדרה גם קובעת את היקף מגוון כל הדוגמאות ששייכות לאותו מושג, ורק אותן. לכן כשאנו מקנים מושגים חדשים עלינו להקפיד על שני עקרונות:

1. יש להבחין הבחנה חד-משמעית בין דוגמאות המשתייכות להגדרה ובין דוגמאות שאינן משתייכות להגדרה. כאשר מגדירים מנסרה, לדוגמה, קובייה היא דוגמה אחת להצגת המושג מנסרה, כי היא עונה על כל הדרישות הנחוצות להגדרת מנסרה. פאון כמו פירמידה הוא דוגמה טובה לגוף שאינו עונה על הגדרת המנסרה, כי לא מתקיימות בו כל הדרישות הנחוצות להגדרת מנסרה.
2. יש לתאר את כל התכונות המאפיינות הנדרשות להגדרת מושג מסוים, ורק אותן. לדוגמה: מנסרה היא פאון שבנוי משתי פאות חופפות הנמצאות במישורים מקבילים. פאות אלה נקראות בסיסי המנסרה, והמעטפת בנויה ממקביליות או ממלבנים. אין צורך לדבר גם על תכונות לא קריטיות כמו צורת הבסיסים (הבסיסים יכולים להיות כל מצולע, ולא משולשים או מרובעים דווקא).

סקמפ (Skemp, 1986) טוען כי אם תלמיד יכול למיין נתונים חדשים על פי דמיונו לדוגמאות של המושג, הרי שרכש את המושג. הוא מתאר את תהליך רכישת המושג בשני שלבים. השלב הראשון הוא שלב ההפשטה מסדר ראשון, שבו הלומד יוצר הפשטה של תכונות המושג על סמך כמה התנסויות. כל התנסות נוספת לאחר ההפשטה הראשונית תיבדק ביחס למושג ואז היא תזוהה. השוואת ההתנסויות הנוספות שלאחר ההפשטה מציגה את הדמיון למושג ואת הייחודיות שלהן לעומת ההתנסויות שקדמו להפשטת המושג. בשלב השני מתרחשת הפשטה מסדר שני, שבה מכלילים קבוצת מושגים לכלל מושג חדש. הרשקוביץ (1989) מונה עוד קריטריונים המצביעים על רכישת המושג על ידי הלומד:

1. היכולת להסביר מדוע אובייקט מסוים או תופעה מסוימת הם דוגמה או אי-דוגמה על סמך תכונות קריטיות או תכונות אי-קריטיות.
2. היכולת להגדיר מושג על בסיס הדוגמאות שלו, או לפחות להשתמש בהגדרה כקריטריון למיון.
3. היכולת להשתמש במושג לפתרון בעיות, להסברת מושגים אחרים ולהסברת היחסים שבין המושג ובין מושגים אחרים.

ישנם מחקרים (Hershkowitz & Vinner, 1984; Wilson, 1990) המתעדים את הפער בין הגדרה של מושג מתמטי ובין שימושם של התלמידים במושגים האלה, ובמחקרים אחרים (Vinner, 1990; Fischbein, 1993; 1996) מנסים להסביר את התופעה. וינר והרשקוביץ

(Vinner & Hershkowitz, 1983) טוענים שיש תאוריות ללמידה שלפיהן הגדרות אמורות להיות שימושיות בתהליך בניית מושגים, אבל הם מוסיפים שיש עדויות אמפיריות שמראות שכאשר תפיסה מוטעית משתרשת התלמידים מתעלמים מההגדרות, אף על פי שהם מכירים אותן בעל פה. מצב זה מקשה לדעתם על ההוראה-למידה של המושג. לדבריהם, המורים, כמו התלמידים, בונים לעצמם דימוי למושגים שהם מלמדים, ודימוי זה משפיע על מהלך ההוראה שלהם. יש לזכור שמושגים גאומטריים הם מושגים מופשטים הנשלטים באופן מוחלט על ידי הגדרתם. כלומר, כל התכונות ההכרחיות והמספיקות של מושג קיימות בהגדרה. למושגים הגאומטריים הגדרות מפורשות, ועל התלמיד לא רק ללמוד את הגדרתם, אלא להבין את חשיבות ההגדרה ככלי המאגד את כל התכונות ההכרחיות והמספיקות של המושג. ההגדרה קובעת את היקף המושג, כלומר את המחלקה הכוללת את כלל הדוגמאות השייכות לו, וכיצד הוא מתייחס למושגים אחרים. וינר (Vinner, 1982) ופישביין (Fischbein, 1996) טוענים שתפקיד ההגדרה בגאומטריה הוא לשמש קריטריון סופי לקביעה אם דוגמה מסוימת משתייכת למושג או לא. ההגדרה משמשת גם כלי להיווצרות מושגים חדשים.

סקמפ (Skemp, 1986) דן בהתנסויות עם דוגמאות של מושג שנדרשות לצורך יצירת אותו מושג. על פי וינר (Vinner, 1991; 1993) ללמידה מדוגמאות משמעותית יותר ללמידת מושגים מאשר למידת מושגים באמצעות הגדרה, או מלמידת רשימת התכונות הכלליות המאפיינות את אותם מושגים. לכן כשאנו מלמדים מושגים חדשים עלינו לבחור דרכים יעילות שיסייעו בתפיסת המושגים הנלמדים ולא ייצרו תפיסות מוטעות או יצמיחו טעויות שקשורות למושג הנרכש.

לפי סקמפ (Skemp, 1986) וויגוצקי (Vygotsky, 1962), תלמידים מתקשים לעתים להבחין בין המושג ובין שמו, ואולם ההבחנה ביניהם חשובה ומהותית. המושג הוא רעיון, ושמו הוא צליל או סימן הקשור אליו. מתן שם לרעיון ממלא תפקיד חשוב ביצירת מושג חדש, אך אי-אפשר לקצר את התהליך על ידי הגדרה מילולית. יש צורך לאסוף דוגמאות ולהתנסות בהן. פלדמן וקלזמאייר (Feldman & Klausmeier, 1975) טוענים שאפשר ללמוד מושג בארבע רמות: ברמה הקונקרטית – הבחנה בתכונות המושג; זיהוי ושיום של המושג; סיווג והבחנה בין דוגמאות ואי-דוגמאות של המושג; והמשגת המושג באופן פורמלי ומופשט. בהוראת המתמטיקה מתעניינים בשתי הרמות הגבוהות: רמת הסיווג וההבחנה והרמה הפורמלית שבה ממשיגים את המושג. החוקרים סבורים שיש יתרון לרכישת מושג באמצעות שילוב הגדרת המושג ואיסוף של כמה קבוצות של דוגמאות ואי-דוגמאות של המושג, כשכל אחת שונה מהאחרת בתכונה רלוונטית אחת (אוספים מושכלים). לדבריהם, דרך זו עדיפה מלימוד המושג על ידי הגדרתו באמצעות דוגמאות ואי-דוגמאות בלבד או על ידי שילוב של הגדרה ואוסף אחד בלבד של דוגמאות ואי-דוגמאות. לטענתם, הגדרה בפני עצמה אינה מספיקה. הגדרה

בלבד מאפשרת זכירה של שרשרת אסוציאציות מילוליות בלבד, ויש לצרף אליה דוגמאות כדי לאפשר ללומד לרכוש את המושג. גם וילסון (Wilson, 1990) מצביעה במחקרה על קשיים של תלמידים בהתמודדות עם הגדרה וטוענת כי הפיכת מילים למושגים ללא דוגמאות היא קשה. כדי למנוע את המצב שבו דוגמאות אבטיפוס משמשות מסגרת עיקרית ויחידה להתייחסות, יש לנסות ולשפוט צורות על פי התכונות הקריטיות שלהן, למשל על ידי ניסוי וטעייה בדוגמאות ואי-דוגמאות, כך שהתלמידים ילמדו על התכונות הקריטיות.

על דוגמאות מסוג אבטיפוס (פרוטוטיפ) ועל דוגמאות אחרות

לפי וינר והרשקוביץ (Vinner & Hershkowitz, 1983), לכל מושג יש דוגמאות שהן אבטיפוס למושג (פרוטוטיפים). הפרוטוטיפים הם תת-קבוצה בקבוצת דוגמאות המושג המייצגים את הקטגוריה כולה. אבטיפוס הוא בדרך כלל דוגמה שבה תכונות רבות. כלומר, נוסף על התכונות הקריטיות של המושג, יש לאבטיפוס תכונות אי-קריטיות רבות נוספות. כשלומד מתייחס לאבטיפוס של מושג הוא מתייחס לתת-קטגוריה של המושג. אלא שבעינינו נעשית התת-קטגוריה הזאת הקטגוריה של המושג כולו. וכך כשהוא נדרש לבחון את תכונות הקטגוריה הוא בוחן בעצם את תכונות התת-קטגוריה. אנליזה של מושג פירושה לנתח את המושג ולבחון את תכונותיו הקריטיות היסודיות. תכונות אלו חייבות להימצא באובייקט שהוא דוגמה של המושג, ואילו תכונות אי-קריטיות יכולות להשתנות מדוגמה לדוגמה (הרשקוביץ, 1989). וינר והרשקוביץ (Vinner & Hershkowitz, 1983) מצאו במחקרם כמה דרכי סיווג צורות למושגים:

1. סיווג ויזואלי – בסיווג זה הלומד מסתמך על האבטיפוס כמסגרת התייחסות ומנסה להתאים את הצורה לאבטיפוס מבחינה ויזואלית.
2. סיווג המבוסס על תכונות האבטיפוס – בסיווג זה הלומד כופה את תכונות האבטיפוס על הדוגמה שהוא בודק. אם ישנן תכונות של האבטיפוס שאינן שייכות לתכונה הנבדקת, פוסל התלמיד את הדוגמה ופוסק שאינה שייכת למושג.
3. סיווג אנליטי – מבוסס על תכונות קריטיות. סיווג זה נשען על התכונות הקריטיות של מושג שמופיעות בהגדרתו.

במעבר להגדרה הפורמלית של המושג יוצרים הלומדים דימוי של המושג (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1991, 1993). דימוי המושג הוא ייצוג לא מילולי הקשור בתודעת הלומד לשם המושג. הוא מכיל קבוצה של תכונות ותמונות המתקשרות למושג. בין דימוי המושג להגדרת המושג יכולה להיות התאמה מלאה או חלקית, ויכול להיות גם ניגוד. תפקיד ההגדרה ביצירת דימוי המושג אצל הלומדים אינו ברור: ההגדרה או שם המושג יכולים ליצור בתודעת הלומדים דימוי שלם של מושג או דימוי חלקי שלו, או לחלופין, לא ליצור דבר (Vinner, 1993).

1983). וינר והרשקוביץ (Vinner & Hershkowitz, 1983) טוענים שכדי להשתמש במושג בחיי היום-יום זקוק היחיד לדימוי מושג, אך אין הכרח שהוא ידע את הגדרת המושג וישלוט בה. בתהליך החשיבה יש בדרך כלל התוודעות לדימוי של מושג ולא להגדרתו, ואילו בלמידה פורמלית הגדרת המושג תופסת מקום מרכזי. לדעתם, תלמידים רבים (ללא תלות בגיל) נוטים להגדיר מושגים גאומטריים בדרך נאיבית ופשוטה, ולא בדרך של בקיאות מתוך שימוש בהגדרה הפורמלית.

דימוי של מושג עלול לעתים לעמוד בסתירה להגדרה המתמטית המדויקת של המושג. במצב של קונפליקט בין האמת המתמטית-פורמלית ובין התחושה האינטואיטיבית-ספונטנית, בדרך כלל ידה של התחושה האינטואיטיבית על העליונה.

הרשקוביץ (1992) וגל (2005) מציינות שמורים רבים אינם עוסקים מספיק בשיעורים שלהם באי-דוגמאות כשהם מקנים מושגים חדשים. לפי גל, גם מפתחים של חומרי למידה ומורים נוהגים לבחור בדוגמאות מסוימות ולא חושפים את הלומדים למגוון רחב של דוגמאות (שם). במחקר שערכו הרשקוביץ ווינר (Hershkowitz & Vinner, 1984) הם דיווחו שיש מורים לכיתות ה'-ח' ופרחי הוראה במכללות המתקשים אף הם בהבנת מושגים גאומטריים באותה מידה כמו תלמידיהם. במחקר אחר (Hershkowitz, 1987), שבדק את התפיסה של מושגים גאומטריים פשוטים אצל תלמידי כיתות ה'-ח', אצל פרחי הוראה במכללות ואצל מורים בבתי ספר יסודיים, נמצאו הגדרות דומות (נכונות ושגויות) של צורות גאומטריות אצל מורים ותלמידים כאחד. על פי הרשקוביץ, רצוי שלומדים יפתחו יכולת אנליטית ויבססו את שיפוטם על התכונות הקריטיות של המושג, וכך יוכלו להתגבר על הקנייה של מושגים מוטעים (Hershkowitz, 1989). לטענתה, הלומדים נוהגים להשתמש בדוגמה של אבטיפוס לשיפוט דוגמאות אחרות במקום להשתמש בהגדרת המושג ותכונותיו.

לכן חשוב ואף הכרחי שמורים ופרחי הוראה יהיו מודעים לתהליכים הקשורים לרכישת המושג, יבחינו בין דימוי המושג ובין התפיסה הנכונה של המושג. עוד כדאי שיהיו ערים לשגיאות אופייניות במהלך הלמידה שמצמיחות תפיסות מוטעות, וינסו, באמצעות קונפליקטים קוגניטיביים, להשתמש בשגיאות האלה כמנוף להפחתת אותן תפיסות מוטעות. המודעות להדרגתיות הרכישה של מושגים, הנובעת משלבי התפתחות ומהקנייה נכונה של מושגים, עשויה להקל ולשפר את תהליך הלמידה (Patkin, 2010).

דרכים שונות להקניית מושגים: למידה דדוקטיבית ולמידה אינדוקטיבית

על פי הגישה הקונסטרוקטיביסטית, למידה משמעותית היא למידה שבה נקשר ידע חדש לידע קודם רלוונטי שכבר קיים במבנה הקוגניטיבי של הלומד ומוטמע בו. פעולת הגומלין בין הידע החדש לידע הקודם משנה את המבנה הקוגניטיבי של הלומד. הידע גדל, מתפתח ומקבל משמעויות חדשות. תהליך הלמידה המשמעותית הוא במידה רבה באחריות הלומד. הוא צריך

לברר לעצמו מה הוא כבר יודע, ואיך הוא מחבר את מה שהוא יודע לחומר החדש שהוא לומד כעת (Ausubel, 1968). התאוריה של אוזובל מייחסת חשיבות מיוחדת למה שהלומד כבר יודע. אי-התייחסות לידע הקודם ואי-הסתמכות עליו הן בזכו של משאב אינטלקטואלי יקר וכמובן גם של זמן. אוזובל מתאר שני כיוונים בהתפתחות מערכת המושגים:

1. progressive differentiation – כל מושג עובר תהליך של פירוט נוסף שבו מורחבת עוד המשמעות שלו ומועשרת בפרטים נוספים ובדוגמאות.
2. integrative reconciliation – בתהליך זה מגיע הלומד להבנה של ההקשר הרחב יותר של המושג. כשהקונפליקטים בין המושגים החדשים למושגים הקיימים מתיישבים, נוצרת ביניהם השלמה מכלילה, ובסופו של התהליך מצטרפים המושגים יחד לעקרונות ולתאוריות.

שני התהליכים ממחישים את שני הכיוונים שבהם מתפתחים המושגים בלמידה משמעותית: מצד אחד, לומדים עוד פרטים ברמות הכללה נמוכות, ומן הצד האחר מגיעים להבנה רחבה של מושגים ברמת הכללה גבוהה. עוד טוען אוזובל שארגון המושגים במבנה הקוגניטיבי של הלומד נעשה באופן היררכי, כך שמושגים אחדים מאורגנים תחת מושג כוללני יותר. די באזכור של המושג הכוללני כדי שללומד שלמד למידה משמעותית יהיה ברור מהם המושגים הנוספים הקשורים אליו.

הגישה הדדוקטיבית היא הגישה המסורתית להוראת הגאומטריה (Prince & Felder, 2006). היא מתבססת על הרעיון שהצגה מובנית של התכנים יוצרת למידה מיטבית אצל הלומד. המורה על פי הגישה הדדוקטיבית מלמד את הנושאים באמצעות הצגת העקרונות הבסיסיים והגדרתם. הלומדים נדרשים ליישם את העקרונות על ידי דוגמאות. פועל יוצא מכך הוא שלמידה משמעותית מסתייעת מהצגת נושא מהכלל אל הדוגמאות ואל הפרטים באופן דדוקטיבי, וכך גם רצוי לארגן את השיעור. בסופו של התהליך המורה בוחן את יכולות היישום והשינון של התלמידים. הגישה הדדוקטיבית היא פחות הבנייתית מהגישה האחרת – הגישה האינדוקטיבית. **הגישה האינדוקטיבית** היא גישה של למידה פעילה שבה הלומד מתוודע לדוגמאות ולאיי-דוגמאות רבות, מתנסה בעצמו ולומד באמצעותן על הכלל. תפקיד המורה הוא ליצור הזדמנויות והקשרים אשר יסייעו בידי הלומדים להגיע להכללות ולהדריך אותם בעבודתם, אם יש בכך צורך. לפי פרינס ופלדר (Prince & Felder, 2006), גישה זו הולמת יותר את הגישה הקונסטרוקטיביסטית בשל הדרישה לחקר וללמידה באמצעות ניסוי וטעייה. פעילות זו מובילה ללמידה משמעותית (deep approach) ולא ללמידה שטחית (surface approach), שאלה מובילה לטענתם הלמידה הדדוקטיבית.

יש להביא בפני התלמידים דוגמאות לא טיפוסיות רבות המייצגות את המושגים החדשים הנרכשים. חשיפה כזו תוודע את התלמיד לטווח רחב ומלא יותר של דוגמאות, ותמנע ממנו

להסיק כי המושגים מאופיינים רק בדוגמאות טיפוסיות. מלבד דוגמאות של המושג, גם אי-דוגמה עשויה לסייע להפשטה. כך מנסח טול (Tall, 1991) את עקרון הכלת התכונה המשותפת: אם לכל הדוגמאות הניתנות בהקשר מסוים יש תכונה מסוימת, אז ללא דוגמה נגדית עלול הלומד להניח כי התכונה מתקיימת גם בהקשרים אחרים.

פלדר (Felder, 1993) טוען כי יש תלמידים שלומדים טוב יותר בגישה האינדוקטיבית ויש כאלה שלומדים טוב יותר בגישה הדדוקטיבית. הלומדים בגישה האינדוקטיבית מעדיפים להכיר פריטים של דוגמאות ואי-דוגמאות ולנתח אותם כדי להגיע להכללה. הלומדים בגישה הדדוקטיבית, לעומתם, מעדיפים לקבל את הגדרת העקרונות הבסיסיים כדי לגזור מהם מסקנות ודוגמאות. חסרונות הגישה האינדוקטיבית הם הזמן הרב הנדרש ללימוד נושא והאפשרות שהלומד יגיע להכללה שהמורה לא התכוון אליה. זאת ועוד, יש נושאים מסוימים שאינם ניתנים לחקירה אינדוקטיבית בקלות. יש הטוענים כי אין שיטת הוראה-למידה אחת הטובה לכל סוגי התלמידים, בלי תלות בגיל, וכי שתי השיטות ראויות (פטקין, 1996). לכל שיטה היתרונות שלה, ואף ראוי לשלב בין השיטות.

לדעת ויגוצקי (Vygotsky, 1962), רכישת המושגים המדעיים תלויה גם במושגים שהתפתחו במהלך הניסיון של הילד עצמו וגם באינטראקטיביות בין מערכת המושגים הזאת ובין מערכת המושגים התאורטית שמוצגת לילד מבחוץ. במילים אחרות, המושגים המדעיים אינם נרכשים על ידי שינון פשוט ואינם מוחדרים לזיכרון, אלא נוצרים ומעוצבים על ידי פעילות מחשבתית מאומצת של הלומד, ובעקבות הדיאלקטיקה בין שני הכיוונים: מעלה-מטה, מההגדרות התאורטיות אל הדוגמאות, ומטה-מעלה, מהדוגמאות אל ההגדרות התאורטיות.

במאמר זה מתוארת פעילות שעשיתי במכללה להכשרת מורים שלדעתי מאפשרת לעוסקים בהוראת מתמטיקה לבחון שתי דרכים להקניית הגדרות של מושגים חדשים, כדי לסייע בידם להתגבר על קשיי לומדים ברכישת מושגים בסיסיים בהנדסת המרחב, ולהתנסות בשתי הגישות על יתרונותיהן וחסרונותיהן. דרך אחת היא מהתנסות להגדרה והאחרת היא מהגדרה להתנסות. הרעיון לפיתוח הפעילות מבוסס על פעילות של הרשקוביץ (1989) בנושא "משורבע" (משולש ומרובע בעלי קדקוד משותף); מושג שהומצא לצורך תרגיל עם מורים בפועל) ושל פטקין (1996) בנושא דרכים שונות להקניית מושגים בגאומטריה במישור. להלן שתי הדרכים-גישות:

- **מהתנסות להגדרה** – התלמידים מתנסים בניסיונות עוקבים של דוגמאות ואי-דוגמאות. בסוף נדרשים התלמידים לגבש הגדרה מילולית של המושג החדש בכתב. דרך הוראה זו דורשת מהלומד לשלב חשיבה בלמידה, לחקור את המושג ולהגיע להגדרת המושג בכוחות עצמו. דרך הלמידה מהתנסות להגדרה היא חלק מהגישה האינדוקטיבית, שכן בדרך זו אנו יוצאים מהפרט אל הכלל.
- **מהגדרה להתנסות** – ההגדרה המדויקת ניתנת לתלמידים בתחילת תהליך הלמידה,

ומיד לאחר מכן בורקים אם התלמידים הבינו את המושג על ידי אימות ההגדרה דרך דוגמאות ואי־דוגמאות. המטרה היא לבדוק אם ההגדרה אכן נקלטה באופן מדויק או שהתרחשו שיבושים בהבנת המושג שהוגדר. דרך הלמידה מהגדרה להתנסות היא חלק מהגישה הדרוקטיבית, שכן בדרך זו אנו יוצאים מהכלל אל הפרט (Prince & Felder, 2006). כאמור לעיל, לכל אחת מהגישות, האינדוקטיבית והדרוקטיבית, ישנם תומכים, ישנם מתנגדים וישנם כאלה המצדדים בעבודה משולבת עם שתי הגישות יחד.

הפעילות

להלן תיאור קצר של הפעילות שעשיתי בקורס שהעברתי: בפעילות השתתפו 28 מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי ובחטיבת הביניים שלמדו קורס סמסטריאלי בנושא הנדסת המרחב, במסגרת לימודיהם לתואר שני בחינוך מתמטי. כל המורים היו בעלי השכלה מתמטית (B.A. או B.Ed. במתמטיקה) ובעלי ותק של יותר משלוש שנים בהוראה. המשתתפים חולקו לשתי קבוצות: קבוצה של 14 מורים (תשעה בכתי ספר יסודיים וחמישה בחטיבות ביניים שהתנסו בדרך מהתנסות להגדרה, וקבוצה של 14 המשתתפים האחרים) (תשעה בכתי ספר יסודיים וחמישה בחטיבות ביניים שהתנסו בדרך של מהגדרה להתנסות). במסגרת הקורס הוקדשו ארבע פגישות (שמונה שעות לימוד) לתאוריית התפתחות חשיבה בגאומטריה (ואן הילה, 1987, 1999) ולפעילויות מגוונות בהנדסת המרחב כמו מציאת מספר קוביות המרכיבות גופים, ראייה של גופים ממבטים שונים, שרטוטים של גופים שונים והתנסות במתן הגדרות פורמליות למושגים גאומטריים מוכרים. לדוגמה: קובייה היא פאון שהוא מנסרה ריבועית משוכללת שכל פאותיה חופפות. הגדרה אחרת לקובייה: גוף משוכלל הבנוי משישה ריבועים חופפים וכו'. בשיעור החמישי חולקו המורים בקורס לשתי קבוצות לצורך התנסות בשתי הדרכים השונות לרכישת מושג שלא היה מוכר להם: "זווית בין פאה צדדית לבסיס פירמידה".

חשוב לציין כי בתוכנית הלימודים בישראל לא נלמד נושא הנדסת המרחב למידה מעמיקה זה שנים רבות, ולכן למרות השכלה פורמלית במתמטיקה, בבדיקה שעשיתי בקרב כל משתתפי הקורס לפני תחילתו איש מהמשתתפים לא הכיר את המושג.

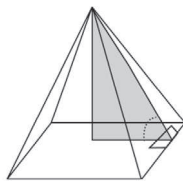
זווית בין פאה צדדית לבסיס פירמידה – הגדרה: הזווית הנוצרת בין הגובה של הפאה הצדדית למקצוע המשותף עם הבסיס לבין היטלו של גובה זה על מישור הבסיס. או: הזווית הנוצרת בין שני האנכים למקצוע המשותף בין הבסיס לפאה הצדדית (המקצוע המשותף הוא ישר החיתוך של שני המישורים).

קבוצת מהתנסות להגדרה

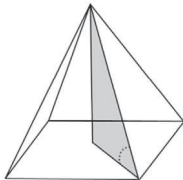
ל-14 המורים בקבוצה זו הוצג המושג החדש ללא הסבר או הגדרה: "זווית בין פאה צדדית

לבסיס פירמידה". המורים קיבלו דפים, וכדי ללמוד את המושג הם נדרשו לכסות בנייר כל עמוד לפני תחילת העבודה, להזיז את הדף המכסה כלפי מטה, עד לקו המקווקו הראשון מלמעלה, ולענות על השאלה המוצגת ליד השרטוט שהתגלה. לאחר מכן להזיז את הדף לקו השני ולענות על השאלה הבאה, וכן הלאה עם כל 22 הפריטים של דוגמאות ואי־דוגמאות. עם סיום הפעילות התבקשו המשתתפים להגדיר (בכוחות עצמם על סמך ההתנסויות שהתנסו בהן) את המושג "זווית בין פאה צדדית לבסיס פירמידה". הפעילות עצמה מבוססת על דוגמאות ואי־דוגמאות אשר אמורות להביא בהדרגה את הלומדים לגיבוש ההגדרה המדויקת של המושג החדש שנרכש. אוסף הדוגמאות והאי־דוגמאות נבנה ממאגר צבור של תשובות נכונות ושגויות של תלמידים במסגרת עבודות בית ומבחנים שבהם נדרשו לשרטט זווית בין פאה צדדית לבסיס פירמידה. להלן הדפים בשלמותם:

הוראות: עליכם לענות על כל שאלה תוך כדי הסתרת השאלות הבאות אחריה. בכל פעם גלו רק את השאלה הבאה וכך תתקדמו.

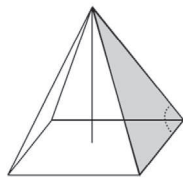


1. הזווית המודגשת בשרטוט היא זווית בין פאה צדדית לבסיס הפירמידה.



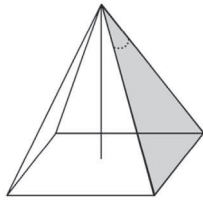
2. האם הזווית המסומנת היא זווית בין פאה לבסיס?

כן / לא



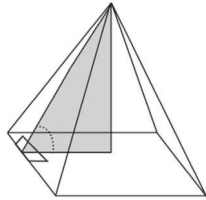
3. התשובה לשאלה הקודמת היא לא. האם הזווית המסומנת זווית בין פאה לבסיס?

כן / לא



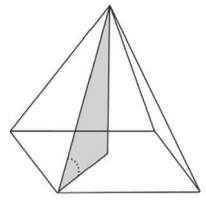
4. התשובה לשאלה הקודמת היא לא. האם הזווית המסומנת היא זווית בין פאה לבסיס?

כן / לא



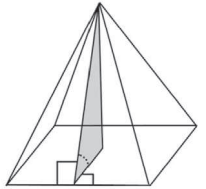
5. התשובה לשאלה הקודמת היא לא. האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



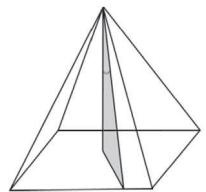
6. התשובה לשאלה הקודמת היא כן. האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



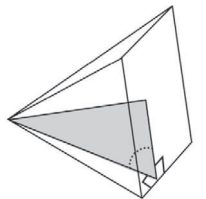
7. התשובה לשאלה הקודמת היא לא. האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



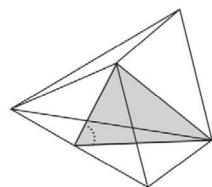
8. התשובה לשאלה הקודמת היא כן. האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



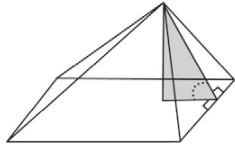
9. התשובה לשאלה הקודמת היא לא. האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



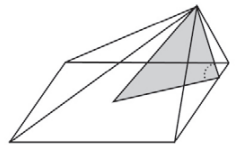
10. התשובה לשאלה הקודמת היא כן. האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



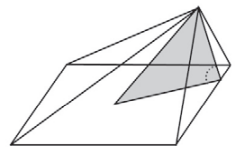
11. התשובה לשאלה הקודמת היא **לא**.
האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



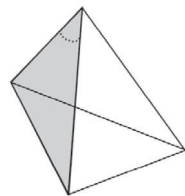
12. התשובה לשאלה הקודמת היא **כן**.
האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



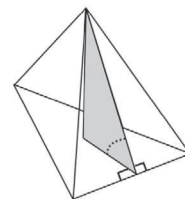
13. התשובה לשאלה הקודמת היא **לא**.
האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



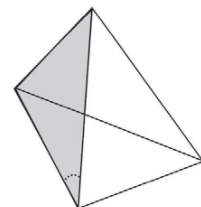
14. התשובה לשאלה הקודמת היא **לא**.
האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



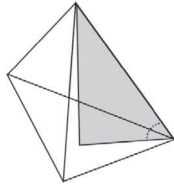
15. התשובה לשאלה הקודמת היא **לא**.
האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



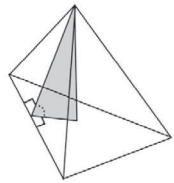
16. התשובה לשאלה הקודמת היא **כן**.
האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



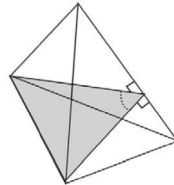
17. התשובה לשאלה הקודמת היא **לא**.
האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



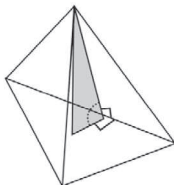
18. התשובה לשאלה הקודמת היא **לא**.
האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



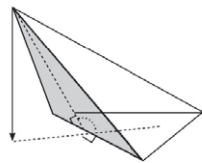
19. התשובה לשאלה הקודמת היא **כן**.
האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



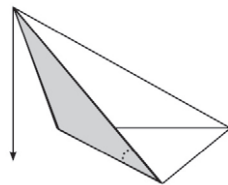
20. התשובה לשאלה הקודמת היא **לא**.
האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



21. התשובה לשאלה הקודמת היא **כן**.
האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא



22. התשובה לשאלה הקודמת היא **כן**.
האם הזווית המסומנת היא בין פאה לבסיס?

כן / לא

התשובה לשאלה הקודמת היא **לא**.

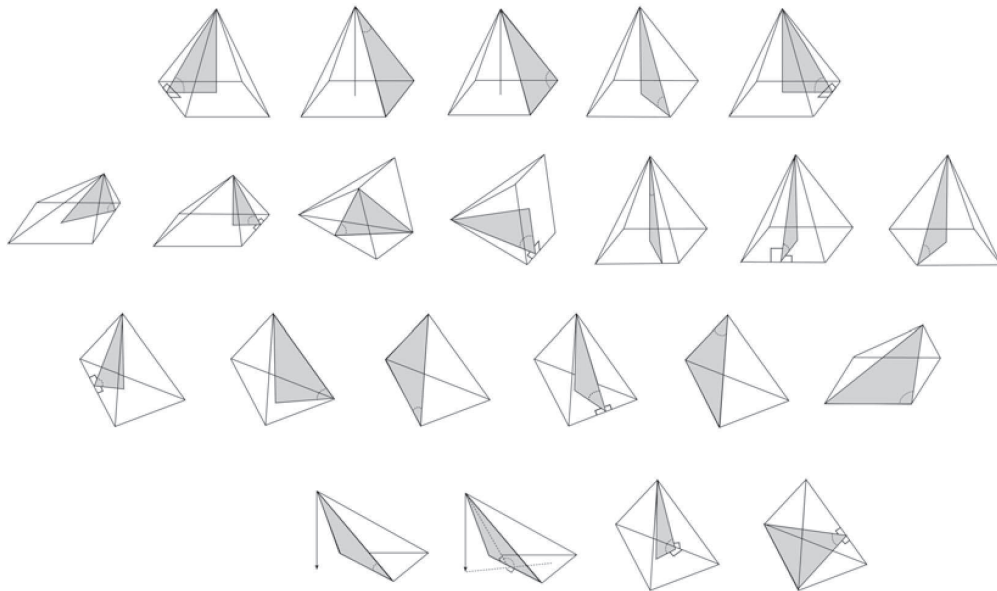
ועכשיו על פי כל השרטוטים והתשובות שקיבלתם הגדירו:

זווית בין פאה לבסיס בפירמידה היא:

מהגדרה להתנסות

ל-14 המורים האחרים בקבוצה השנייה הוצגה הגדרה של המושג זווית בין פאה צדדית לבסיס פירמידה. המורים קיבלו את אותם 22 שרטוטים של פירמידות שכתובם מצוינת זווית, שניתנו בהוראה בדרך מהתנסות להגדרה. הם התבקשו לסמן את השרטוטים של פירמידות שהזווית בהן ענתה על ההגדרה של זווית בין פאה צדדית לבסיס פירמידה שניתנה להם. להלן ההגדרה והשרטוטים שניתנו להם:

הגדרה: זווית בין פאה צדדית לבסיס בפירמידה היא הזווית הנוצרת בין הגובה של הפאה הצדדית למקצוע המשותף עם הבסיס לבין היטלו של גובה זה על מישור הבסיס. במילים פשוטות: הזווית הנוצרת בין שני האנכים למקצוע המשותף בין הבסיס לפאה הצדדית. הוראות: עליכם לזהות מבין כל הזוויות המסומנות את אלה העונות להגדרה של זווית שבין פאה צדדית לבסיס הפירמידה.



חשוב לציין כי גרסה להקניית המושג בגישת מהגדרה להתנסות ברמת קושי גבוהה יותר היא לבקש מהלומדים לשרטט דוגמאות שונות העונות למושג זוויית בין פאה צדדית לבסיס פירמידה. בשיעור השישי התבקשו המשתתפים בקורס להתנסות גם בדרך ההקניה האחרת. כלומר, אלה שהתנסו בשיעור הקודם בדרך של מהתנסות להגדרה התנסו בדרך של מהגדרה להתנסות, ולהפך.

יתרונות וחסרונות של שתי הגישות

עם תום ההתנסות התעורר דיון שמטרתו לחשוף את כל המשתתפים ליתרונות ולחסרונות של כל אחת מדרכי ההקניה, ולפתח שיח מתמטי על שגיאות אופייניות של לומדים בתפיסת מושגים נלמדים. בדיון נותחו שגיאות שנמצאו והגורמים המובילים לאותן שגיאות.

מהשיעור השביעי ועד סוף הסמסטר התבקשו המורים לנסות ולהפעיל את שתי הדרכים בכיתות ההוראה שלהם בבתי הספר ולדווח בסוף הסמסטר על דרך ההוראה המתאימה להם יותר, שמובילה להקניה טובה של המושגים שלימדו בקרב תלמידיהם. הם התבקשו להגיש דוגמה שבה הקנו מושגים בשתי הדרכים. כדי לאפשר להם יישום מלא של הפעלת הדרכים האלה, בחר כל מורה מושגים שבתחום תוכנית הלימודים בכיתתו. כלומר המושגים לא היו צריכים להיות מתחום הנדסת המרחב דווקא, אלא בגאומטריה בכל תחום שמתאים להם. השיעור האחרון הוקדש לדיון ולסיכום. המורים התבקשו לציין מה לדעתם היתרונות של כל אחת מהדרכים, ולהצביע על הדרך המועדפת עליהם, אם יש כזאת, בלמידת מושגים חדשים ובהוראתם.

להלן כמה מהאמירות של משתתפי הפעילות במפגש הזה, שאפשר ללמוד מהן על היתרונות והחסרונות של כל אחת מהדרכים, והן מעלות חומר למחשבה למכשירי מורים בתחום.

יתרונות מהתנסות להגדרה: "זו הדרך הטבעית שבה ילדים לומדים ורוכשים מושגים. לדוגמה, כיצד מסבירים לילד כי נגיעה במים רותחים תגרום לכוויות? אם הילד ייגע פעם במים חמים מאוד והמגע יכאב לו, הוא יבין שזה לא מומלץ. גם מבוגרים רבים נוהגים לרכוש כך מושגים" (א"ג). היטיבה לנסח זאת אחת המשתתפות בפעילות: "הלימוד לפי דרך ההוראה מהתנסות להגדרה, מוביל ללמידה משמעותית ולתהליך למידה הכולל הפנמה של מידע בצורה המאפשרת הכללה והסקת מסקנות או שינוי בלתי אמצעי בדרכי התנהגות, זאת על ידי יצירה וחיזוק של המוטיבציה בקרב התלמידים, בכך שהוא שם אותם במרכז העשייה. התלמידים לוקחים חלק בעיצוב המושג והבנתו, המחזק את שליטתו של התלמיד בחומר הנלמד" (ק"ר).

חסרון מהתנסות להגדרה: לפעמים הלימוד מתבסס על לימוד חלקי: "אוסף חלקי של דוגמאות ואי-דוגמאות, דבר הפוגם בגיבוש ההגדרה הפורמלית של המושג" (ד"ח).

יתרון מהגדרה להתנסות: "כאשר מתחילים במתן הגדרה פורמלית, ההגדרה מהווה גורם

- מאבחן בין דוגמאות המייצגות את המושג לבין אי-דוגמאות המלוות אותו" (ר"מ).
- חיסרון מהגדרה להתנסות:** "ההשפעה של הדימוי האינטואיטיבי היא לעתים חזקה יותר מן ההגדרה הפורמלית של המושג הנלמד" (א"ד).
- המשתתפים העלו גם כמה שאלות ותהיות:
- האם אפשר להסיק מפעילות אחת על יעילותה של דרך הוראה אחת, לעומת דרך הוראה אחרת לאורך זמן?
 - האם רצוי לאמץ דרך אחת בלבד או להשתמש בדרכים שונות, לפי סגנון הלמידה של הלומד ולפי יכולתו להתמודד עם הגדרות פורמליות?
 - האם אפשר, ואולי אף מומלץ, להקנות מושגים בדרך המשלבת את שתי השיטות גם יחד? כלומר אפשר להתחיל את ההוראה בהתנסות, לאחר מכן לבקש מהלומדים לתת הגדרה פורמלית למושג הנלמד, לדון בהגדרה, ואז לסיים באימות המושג הנרכש דרך דוגמאות ואי-דוגמאות נוספות, או להתחיל בתהליך בדרך ההפוכה.
 - האם הגדרת מושג רק על ידי דוגמאות ואי-דוגמאות (כלומר הגדרה אינדוקטיבית) היא מספקת, ולא מובילה ליצירת מושגים מוטעים או חלקיים? מאחר שיש מושגים שמספר הדוגמאות והאי-דוגמאות בהם אינסופי, האם הגדרה אינדוקטיבית יכולה לכסות באופן חד-משמעי את המושג המוגדר?

סיכום

בתהליך רכישת מושגים חשוב שכל מושג יוקנה בדרך שתהיה משמעותית ביותר ללומד, ולא יהיה אוסף של מילים חסרות משמעות. בתהליך ההמשגה של מושגים גאומטריים במישור ובמרחב אפשר להבחין בכמה שלבים התואמים את התאוריה של ואן-הילה להתפתחות רמות החשיבה בגאומטריה (Patkin, 2010). בתחילה הלומד מתרשם מהצורה בשלמותה, ועם התקדמותו הוא מתייחס גם לתכונות הקריטיות והאי-קריטיות של אותה צורה. לכן עלינו, המורים, להכיר דרכים שונות להקניית מושגים ולשלוט בהם, לייצר אסטרטגיות שונות להוראת המושגים ולשלב פעילויות המבוססות על יחסים אנליטיים בין התכונות הקריטיות של המושג על ידי סדרות של דוגמאות ואי-דוגמאות. בהצגת פעילות זו אינני מעדיפה דרך אחת מן האחרת. חשוב שמורים יכירו את שתי הגישות או ישלבו ביניהן בהוראה שלהם. עצם העלאת המודעות לחלופות בהקניית מושג משפרת לדעתי את דרך ההוראה שלנו כמורים. מניסיון אישי כמכשירת מורים למתמטיקה אני יכולה להעיד על שימוש שעשיתי בדרכים האלה לא רק בלימוד מושגים בגאומטריה, אלא גם בענפים אחרים של המתמטיקה. איסוף דוגמאות ואי-דוגמאות מסייע לי כמרצה לחשוף את הלומדים לטעויות קיימות נפוצות ולתפיסות מוטעות שצומחות. לכן אני ממליצה להתנסות בדרכים האלה בייחוד במושגים "קשים" להוראה וללמידה,

כדי להשביח את דרכי ההוראה של מורים, להעלות אצלם שאלות על דרכי הוראה יעילות, ואולי בזכות כל זאת להשביח את דרכי הלמידה של הלומדים ולענות על צורכיהם.

מקורות

ברקאי, ר' ופטקין, ד' (2012). רמות החשיבה בגיאומטריה של מורים ומתכשרים להוראת מתמטיקה בנושאים שונים בגיאומטריה של המישור והמרחב, בנקודות ציון שונות במהלך הכשרתם, **החינוך וסביבו**, ל"ד: 83-96. גל, ה' (2005). המשגה, בתוך **המצ"ב מזווית אחרת: מצבי הוראה בעייתיים בגאומטריה**, תל אביב: מכון מופ"ת, עמ' 140-147.

הרשקוביץ, ר' (1989). פעילויות עם מורים על מושגים גיאומטריים בסיסיים, בתוך א' פרידלנדר (עורך), **הוראת ההנרסה: אוסף מקורות ופעילויות לשיעורי מתודיקה**, רחובות: מכון ויצמן, המחלקה להוראת המדעים, עמ' 115-142.

הרשקוביץ, ר. (1992). אספקטים קוגניטיביים בהוראה ובלמידה של גיאומטריה – חלק ב'. **על"ה: עלון למורה למתמטיקה**, 10, עמ' 20-27.

פטקין, ד' (1996). דרכים שונות להקניית מושגים חדשים בגיאומטריה, **החינוך וסביבו**, יח: 179-190.

Ausubel, D.P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*, New York: Holt, Reinhart & Wilson.

Ben-Chaim, D., Lappan, G., Houang, R. T. (1989). Adolescents' Ability to Communicate Spatial Information: Analyzing and Affecting Students' Performance, *Educational Studies in Mathematics*, 20, pp. 121-146.

Felder, R. (1993). Reaching the Second Tier: Learning and Teaching Styles in College Science Education, *Journal of College Science Teaching*, 23 (5), pp. 286-290.

Feldman, K.V., Klausmeier, H.J. (1975). The Effect of a Definition and a Varying Number of Examples on Concept Attainment, *Journal of Educational Psychology*, 67, pp. 174-178.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24, pp. 139-162.

Fischbein, E. (1996). The Psychological Nature of Concepts, In H. Mansfield, N. A. Pateman & N. Bernardz (Eds.), *Mathematics for Young Children. International Perspective on Curriculum*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Hershkowitz, R. & Vinner, S. (1984). Childrens' Concepts in Elementary Geometry: A Reflection of Teachers' Concepts? In B. Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Conroy of Collis, K. (Eds.) Proceedings of Eight International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Australia, pp. 63-69.

Hershkowitz, R. (1987). The Acquisition of Concepts and Misconceptions in Basic Geometry – or When a Little Learning is Dangerous Thing. In J.D. Novak (Ed.) Proceeding of the Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, U.S.A, Vol. III, pp. 238-251.

Hershkowitz, R. (1989a). Visualization in Geometry – Two Sides of the Coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), pp. 61-76.

- Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. In P. Neshier & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, pp. 70-95.
- Hershkowitz, R. & Vinner, S. (1983). The Role of Critical and Non-critical Attributes in the Concept Image of Geometrical Concepts, In R. Hershkowitz (Ed.), *Proceedings of the 7th PME International Conference*, pp. 223-228. Shores, Israel: The Weizmann Institute of Science.
- Patkin, D. (2010). The Role of "Personal Knowledge" in Solid Geometry Among Primary School Mathematics Teachers. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education. Series D: Research in Mathematical Education*, 14 (3), pp. 263-279.
- Patkin, D. (2011). The Interplay of Language and Mathematics. *Pythagoras: Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa*, 32 (2), pp. 1-7.
- Prince, J.M., & Felder, R.M. (2006). Inductive Teaching and Learning Method: Definitions, Comparisons and Research Bases, *Journal Engineering Education*, 95, pp. 123-138.
- Skemp, R.R (1986). *The Psychology of Learning Mathematics*, 2nd Edition. London: Penguin Books.
- Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking, In Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 4-21.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169.
- Van Hiele, P. M., & Van Hiele, D. (1958). A Method of Initiation into Geometry, In H. Freudenthal (Ed.), *Report on Methods of Initiation Into Geometry*, Groningen: Walters.
- Vinner, S. (1982). *Conflicts Between Definitions and Intuitions – the Case of the Tangent*, Proceedings of the 6th International Conference for the Psychology of Mathematical Education, pp. 24-29.
- Vinner, S. (1983). Concepts, Definition, Concept Image and Notion of Function, *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 14(3), pp. 293-305.
- Vinner, S. (1990). Inconsistencies: their Causes and Function in Learning Mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, pp. 85-98.
- Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics, In Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, pp. 65-81.
- Vinner, S. (1993). *Pseudo-conceptual and Pseudo-analytical Behaviors in Science Learning*. A paper presented at the international conference on Science Education in Developing Countries, Jerusalem, pp. 3-7.
- Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1983). On Concept Formation in Geometry, *Zentralblatt fur Didactic der Mathematic*, 15, pp. 20-25.
- Vygotsky, L.S. (1962). *Thought and Language*, Cambridge, MIT Press.
- Wilson, P. S. (1990). Inconsistent Ideas Related to Definitions and Examples, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, pp. 31-47.

patkin@netvision.net.il