המכנה המשותף – משברים פשוטים ועד שברים אלגבריים

רונית בסן־צינצינטוס ודורית פטקין

תקציר

מאמר זה מציג פעילות דו־שלבית בנושא מציאת מכנה משותף, החל בשברים פשוטים ועד שברים אלגבריים, המיועדת להעצמת פרחי הוראה ומורים המלמדים בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי ובחטיבות הביניים, ולתלמידים הלומדים בכיתות אלו. הפעילות מבוססת על פיתוח מיומנות מטה־קוגניטיבית. מטרת הפעילות להוביל מתכַּשרים להוראה לפתח בעצמם פעילויות למציאת מכנה משותף ולחשוף אותם לטעויות ולתפיסות מוטעות בהכנת הפעילויות. מהפעילות עולה כי המתכשרים להוראה מתקשים לעבור מפעילות של מציאת מכנה משותף בשברים פשוטים לפעילות דומה בשברים אלגבריים; וחלקם אינם מבחינים בין תנאי מספיק לתנאי הכרחי.

מילות מפתח: מטה־קוגניציה, שברים פשוטים, שברים אלגבריים, פירוק לגורמים, כפולה משותפת, מכנה משותף קטן ביותר.

בעשורים האחרונים אפשר להבחין בריבוי מחקרים שבוחנים את השפעת השימוש בשיטות מטה־קוגניטיביות על הצלחות של תלמידים במתמטיקה. מטה־קוגניציה היא הפעולה של הערכה ושיקוף של מה שאדם חושב (Schoenfeld, 1992). כיום גוברת ההשקפה בקרב מספר הולך וגדל של חוקרים שהתנסויות וחוויות

מטה־קוגניטיביות הן חשובות ביותר לקידום תהליכים קוגניטיביים (Koriat and Levy-Sadot, 1999; Efklides, 2001; 2006; Carver, 2003). יעילות הגישה המטה־קוגניטיבית נבחנת במחקרים העוסקים בהוראת נושאים שונים, למשל פתרון בעיות כפל וחילוק בבית הספר היסודי ובחטיבת הביניים (Garofalo and Lester, 1985), הבנתו של מושג האין־סוף בחטיבה העליונה (Tirosh and Tsamir, 1997) ולימודי מתמטיקה של בוגרים במכללות ובאוניברסיטאות (Schoenfeld, 1987; 1992). על פי הספרות המחקרית, הוראה בשיטה זו יעילה ביותר להתפתחות החשיבה של הלומדים ברמה המטה־קוגניטיבית. טיעון זה נתמך במחקרים מתחומי תוכן שונים, כגון הבנת הנקרא, פתרון בעיות במתמטיקה, לימודי שפה זרה, כתיבה והוראת המדעים (Zohar, 1994; 1996; Zohar and Ben-David, 2008). אפשר לומר כי רוב המחקרים מצאו כי שימוש בשיטות מטה־קוגניטיביות משפר את הישגי הלומדים.

למושג מטה־קוגניציה הגדרות שונות, החל בידע של הפרט על דרכי החשיבה שלו, וכלה בשינוי דרכי החשיבה בעקבות משוב עצמי (Schoenfeld, 1992). חשוב להבחין בין הקוגניציה ובין המטה־קוגניציה. במושג המספר, למשל, קוגניציה היא זכירה של המספר ומטה־קוגניציה היא האסטרטגיות שבהן אנו מלמדים את עצמנו לזכור את המספר. שיינפלד מפרש את המונח מטה־קוגניציה "חשיבתך על חשיבתך", והוא מחלק אותה לשלוש קטגוריות: ידע מוצהר של אדם על תהליכי החשיבה שלו; תהליכי תיקון עצמי (self-regulation), כולל בקרה וקבלת החלטות; וידע מוצהר של אדם על האמונות והאינטואיציות שלו ועל השפעתן עליו. הוא מציע כמה פעילויות לפיתוח מיומנויות מטה־קוגניטיביות, כמו: **לא להביא לכיתה פתרון מלא ומלוטש לבעיה**, אלא לאפשר לתלמידים לבדוק תחילה כמה אפשרויות לפתרון הבעיה. דרך זו תורמת להבנת הבעיה על ידי התלמיד. רק לאחר בחירה בכיוון מסוים לפתרון יש לשקול אם הכיוון המתפתח הוא הרצוי והנכון לפתרון הבעיה, ואז לדון בו; **לקיים דיון בבעיה במליאת הכיתה** כאשר המורה משמש נווט בלבד; להשתמש בהקלטות וידאו כדי להגביר את המודעות העצמית, שכן ללא מודעות עצמית אין סיכוי לשנות תפיסה; **לפתור את הבעיות בקבוצות קטנות**, כאשר המורה עובר בין הקבוצות ומשמש מתווך בלבד, שואל שאלות כגון: "מה אתה עושה בשלב הזה?", "מדוע אתה עושה את...?", ונותן הנחיות כמו "תשווה בין שלב קודם לשלב זה" (Schoenfeld, 1987; 1992).

הנושא שברים אלגבריים מופיע לראשונה בתכנית הלימודים של חטיבת הביניים כבר בכיתה ז'. "הצבת מספרים בביטויים אלגבריים, וחישוב ערכם

המספרי של הביטויים החשבוניים המתקבלים". "יש לתרגל הצבת שברים פשוטים [...]. שוויון בין ביטויים אלגבריים, ובהקשר זה, לתרגל פעולות בשברים [...]". בכיתה ח' "מעמיקים בטכניקה האלגברית, ולומדים לפתור גם משוואות המכילות שברים אלגבריים" (משרד החינוך, 2012). חשוב להדגיש כי שלב לימוד זה בא לאחר שתלמידים למדו ותרגלו את נושא השברים בבית הספר היסודי.

תלמידי חטיבת הביניים מתקשים בשברים אלגבריים. הקושי העיקרי מתבטא במציאת המכנה המשותף, והוא נובע מהעברת העקרונות שנלמדו בתחום המספרי ויישומם על התחום האלגברי – מציאת מכנה משותף לשברים אלגבריים.

במתמטיקה מכנה משותף של שני שברים הוא מספר שלם המתחלק בשני המכנים. המכנה המשותף הקטן ביותר הוא הכפולה המשותפת המינימלית – כפולה משותפת קטנה ביותר (כמק"ב) של המכנים, וכל מכנה משותף אחר הוא כפולה שלו בקבוע. את הכלל הזה אפשר להחיל על כל קבוצה סופית של שברים, כלומר כפולה משותפת מינימלית של כמה מספרים טבעיים היא המספר הטבעי הקטן ביותר שמתחלק ללא שארית בכל אחד מהמספרים הטבעיים הנתונים.

לדוגמה, הכפולה המשותפת המינימלית של 6 ו-8 היא 24. כל אחד מאין־סוף המספרים המתחלקים ב-24 ללא שארית, למשל 48, 72, 96 וכו', יכולים להיות כפולה משותפת של 6 ו-8, אך אינם הכפולה המשותפת המינימלית.

אם כך, מכנה משותף הוא כל מכפלה משותפת של המכנים. כלומר מספר שאפשר לחלק אותו בכל אחד מן המכנים. אם המכנים הם 3 ו-5, למשל, יש להם הרבה מכנים משותפים (15, 30, 45, 60 ...), כלומר כל כפולה של 15 מתאימה להיות מכנה משותף, אך המכנה המשותף הקטן ביותר של המכנים הללו הוא 15, ובדרך כלל אליו מתכוונים כשמבקשים למצוא את המכנה המשותף של שני המספרים. כאמור, מכנה משותף יכול להיות גם מכפלתם של מכנים נתונים. לדוגמה, למכנים 3 ו-6 אפשר לרשום מכנה משותף שהוא מכפלתם: $3 X 6 = 18$. לחלופין, גם המספר 6 יכול לשמש מכנה משותף, והוא המכנה המשותף הקטן ביותר לשני המספרים האלה. כאשר המכנים הם מספרים זרים אין להם מכנה משותף הקטן ממכפלתם, והמכנה המשותף יהיה שונה מכל אחד מהמכנים ואף גדול מהם.

בלימודי המתמטיקה נחשפים התלמידים לצורך במציאת המכנה המשותף ולשימוש בו. תחילה כאשר הם לומדים את התחום המספרי בלבד, כאשר עליהם להשוות בין שברים או לחבר ולחסר שברים, ובהמשך בראשית לימודי האלגברה כאשר התחום מתרחב לשברים אלגבריים.

נניח שנתונים שני שברים, $\frac{3}{4}$ ו-$\frac{29}{38}$ שברצוננו להשוות ביניהם. יש להשתמש

בהרחבה ובצמצום ולמצוא לשני השברים מכנה משותף, כלומר מכנה אשר בדרך של הרחבה או צמצום שניהם יכולים להגיע אליו. לאחר שנשווה את שני המכנים נוכל למצוא את היחס בין שני השברים באמצעות השוואה פשוטה בין המונים: השבר בעל המונה הגדול יותר הוא השבר הגדול יותר, ואם המונים שווים, השברים שווים זה לזה (כי גם המכנים שווים). למציאת מכנה משותף נפעל על פי השלבים הבאים:

1. **הצגת השברים בצורתם המצומצמת ביותר (שלב זה אינו הכרחי, אך בדרך כלל מקל על מציאת מכנה משותף קטן ביותר).**
2. **פירוק ורישום של כל הגורמים הראשוניים של המכנה הראשון.**
3. **פירוק ורישום של כל הגורמים הראשוניים של המכנה השני.**
4. **רישום כל הגורמים הראשוניים של שני המכנים, כך שכל גורם ראשוני יופיע במספר הפעמים המקסימלי של אחד המכנים. למשל, אם במכנה הראשון גורם ראשוני מסוים מופיע 4 פעמים, ובמכנה השני הוא מופיע 6 פעמים, נרשום אותו 6 פעמים.**
5. **רישום מכפלת כל הגורמים הראשוניים מסעיף 4 – המכפלה היא המכנה המשותף.**

נחלק את המכנה המשותף במכנה של המספר הראשון כדי למצוא בכמה עלינו להרחיב את השבר, ונרחיב אותו במספר זה, כך שהמכנה יהיה המכנה המשותף. נבצע זאת גם על מכנה המספר השני.

בדוגמה שלעיל ($\frac{3}{4}$ ו-$\frac{29}{38}$) הגורמים הראשוניים של 4 הם 2 ו-2. הגורמים הראשוניים של 38 הם 19 ו-2. לכן המכנה המשותף הוא 19 x 2 x 2. נרחיב: השבר הראשון הוא $\frac{3}{4} = \frac{3x19}{4x19} = \frac{57}{76}$, והשבר השני הוא $\frac{29}{38} = \frac{29x2}{38x2} = \frac{58}{76}$.

נשווה בין המונים ונקבל: $\frac{58}{76} > \frac{57}{76}$. על כן $\frac{29}{38} > \frac{3}{4}$ ועל כן השבר השני גדול מהראשון.

כאשר המכנה הראשון מתחלק במכנה השני, או להפך, מרחיבים את המכנה הקטן יותר בלבד, מכיוון שהמכנה המשותף הוא המכנה הגדול יותר.

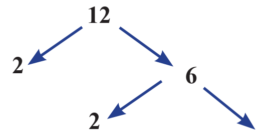
נציג כמה דרכים למציאת המכנה המשותף הקטן ביותר:

כפולות משותפות

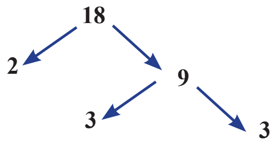
12 ⟶ 12 , 24 , **36** , 48 , 60 , **72**, ...

18 ⟶ 18 , **36** , 54 , **72** , 90 , 108, ...

פירוק לגורמים



$2^2 \times 3^1$



$2^1 \times 3^2$

הכפולה המשותפת הקטנה ביותר היא: $2^2 \times 3^2 = 36$

פירוק משותף לגורמים

12	18	2
6	9	2
3	9	3
1	3	3
1	1	36

תלמידי החטיבה אינם מוצאים בנקל את המכנה המשותף של שברים אלגבריים. כדי לתת מענה לקשיים נתמקד במציאת מכנה משותף בלבד. תחילה באמצעות הצפת ידע קיים מהתחום המספרי – תרגילים פשוטים של חיבור וחיסור שברים – כדי להיזכר ולשבור את הפחד והרתיעה מתחום השברים, וכך לקשר בין התחום המספרי לתחום האלגברי.

דוגמאות לתרגילי חיבור וחיסור הדורשים מציאת מכנה משותף:

$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=$ $\quad \frac{5}{8}-\frac{1}{4}=$ $\quad 1\frac{3}{7}+\frac{9}{10}=$ $\quad 5\frac{2}{9}-3\frac{2}{3}=$ $\quad \frac{5}{7}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=$ $\quad 9\frac{5}{8}-\frac{5}{6}+\frac{1}{12}=$

כדי לאפשר לתלמידים להתמקד במציאת מכנה משותף בלבד אפשר להציג את משימת המכנה המשותף בפעילות דומה אך פחות "מאיימת" (Bassan-Cincinatus and Patkin, 2015). הפעילות אינה מצריכה את כל תהליך הרחבת השברים ועדיין משיגה את המטרה. המספרים בשחור הם המכנים של השברים, ועל התלמידים למצוא את המכנה המשותף לכל שורה ולכל טור (המספרים באדום).

8	6	3	24
10	4	12	60
5	9	9	90
40	12	36	

8	6	3	24
10	4	12	60
40	12	12	

8	6	24
10	4	20
40	12	

בשלב הבא אפשר לבקש למצוא מכנים מתאימים כאשר נתונים המכנים המשותפים. כדי להציג משימה מדורגת כדאי לתת רק חלק מהמכנים, או להשאיר את הלוח ללא מספרים המייצגים מכנים (הפעילות הקודמת יכולה לשמש פתרון לפעילות זו).

			24
			60
			90
40	12	36	

		3	24
10			60
40	12	12	

8		24
	4	20
40	12	

כמו בחיבור וחיסור של שברים פשוטים, גם בחיבור וחיסור של שברים אלגבריים יש למצוא את המכנה המשותף. בדרך כלל רצוי למצוא את המכנה המשותף הקטן ביותר. נבחין בין שני סוגים של שברים אלגבריים:

- **שברים שבמכנה שלהם יש רק חד־איברים** - שברים אלו אפשר לחלק לשתי קבוצות על פי המכנים: מכנה שבו רק מספרים, ומכנה שבו גם מספרים וגם אותיות והקשר בין המספרים לאותיות הוא כפל בלבד.
- **שברים שבמכנה שלהם יש גם רב־איברים** - שברים שהקשר בין המספרים לאותיות שבמכנה שלהם הוא גם חיבור וחיסור (לא רק כפל).

חיבור וחיסור של שברים אלגבריים שבמכנה שלהם יש רק חד־איברים

דוגמה לשברים שבמכנה שלהם מספרים:

פשט את תבנית המספר: $\frac{2a+5}{10}-\frac{a-1}{8}$

המכנה המשותף הקטן ביותר של 8 ו-10 הוא 40. לאחר כינוס איברים במונה ופירוקו לגורמים על ידי הוצאת גורם משותף נוכל לצמצם. נקבל:

$$\frac{2a+5}{10}-\frac{a-1}{8}=\frac{4(2a+5)-5(a-1)}{40}=\frac{8a+20-5a+5}{40}=\frac{3a+25}{40}$$

דוגמה לשברים שבמכנה שלהם מספרים ואותיות:

חשב: $\frac{a+5}{4a^2} - \frac{1}{6a}$

המכנה המשותף המינימלי של המספרים 4 ו-6 הוא 12. המכנה המשותף המינימלי של a^2 ו-a הוא a^2. לכן המכנה המשותף המינימלי הוא $12a^2$.

נחלק את המכנה המשותף במכנה של השבר השמאלי כדי לראות בכמה צריך להרחיבו: $\frac{12a^2}{4a^2} = 3$

נחלק את המכנה המשותף במכנה של השבר הימני כדי לראות בכמה צריך להרחיבו: $\frac{12a^2}{6a} = 2a$

נקבל: $\frac{a+5}{4a^2} - \frac{1}{6a} = \frac{3(a+5)-2a}{12a^2} = \frac{3a+15-2a}{12a^2} = \frac{a+15}{12a^2}$

חיבור וחיסור של שברים אלגבריים שבמכנה שלהם יש גם רב־איברים

פשט וכנס את תבנית המספר: $\frac{a-3}{9a+27} + \frac{a+1}{3a+a^2}$

המכנה המשותף יכול להיות מכפלת שני המכנים, אך אפשר להציג כל מכנה כמכפלה של גורמים:

$a(3+a)$, $9(a+3)$ ומכאן שהמכנה המשותף המינימלי הוא $9a(a+3)$

נקבל:

$$\frac{a-3}{9a+27} + \frac{a+1}{3a+a^2} = \frac{a-3}{9(a+3)} + \frac{a+1}{a(a+3)} = \frac{a(a-3)}{9a(a+3)} + \frac{9(a+1)}{9a(a+3)} = \frac{a^2-3a+9a+9}{9a(a+3)} = \frac{a^2+6a+9}{9a(a+3)} = \frac{(a+3)^2}{9a(a+3)} = \frac{a+3}{9a}$$

בספרי לימוד בדרך כלל אפשר למצוא אוסף תרגילים שהתלמיד מתבקש לחשב בעצמו אך אפשר להציג את משימת מציאת המכנה המשותף גם בדף עבודה שבו נתונות האפשרויות לפתרון – מה נכון? תרגול מכנה משותף: בכל אחד מהתרגילים הקף במעגל את המכנה המשותף המינימלי:

$\frac{x-3}{5}-\frac{7x+9}{10}=1-\frac{1-3x}{2}$ א. 20   ב. **10**   ג. 100   ד. 40

$\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x+4}=1$ א. 2X-4   ב. x^2-4   ג. **(X+4)(X-1)**   ד. x^2+3

$\frac{5}{x^2-3x}-\frac{1}{2x-6}=\frac{2}{x-3}$ א. X^2-3X   ב. (2X-6)(X-3)   ג. **2X(X-3)**   ד. $2x^2(x$-6)

התמקדות במציאת המכנה המשותף בשברים אלגבריים ללא תרגילי החיבור והחיסור וללא הרחבת השברים האלגבריים תתאפשר בפעילות הבאה. היא מתמקדת במכנה בלבד ומשיגה את תרגול הנושא. המספרים בשחור הם המכנים של השברים, ועל התלמידים למצוא את המכנה המשותף לכל שורה ולכל טור (המספרים באדום).

x^2-3x	2X-6	6	6X(X-3)
X	3X	(X+3)	3X(X+3)
2	6X	(X-3)	6X(X-3)
2X(X-3)	6X(X-3)	6(X+3)(X-3)	

X	2(X+3)	2X(X+3)
3X	4X	12X
3X	4X(X+3)	

בהמשך לפעילות זו אפשר לתרגל באמצעות "משחק המכנים", שמטרתו למצוא את המכנה המשותף בין שני ביטויים אלגבריים (על כל כרטיס נרשם המכנה בלבד). זהו משחק זוגות (או קבוצות) שכל שחקן (או קבוצה) מקבל מחצית הכרטיסים. בכל תור כל שחקן חושף כרטיס אחד, ואז צריך להעתיק את הכתוב על שני הכרטיסים ולחשב את המכנה המשותף להם. להלן כרטיסים לדוגמה:

8X	3(x + 1)	5	(x + 1)	2X	4x^2
x^2	12X	x(x + 1)	3x^2	3X	2(x + 1)
6(x + 1)	7X	X	12	4X	7(x + 1)

מתוך הפתרונות של המשחק הקודם אפשר לבחור מכנה משותף אחד ולפרק אותו לכמה מכנים אפשריים (אין הכוונה לפירוק לגורמים, אלא למציאת כמה שיותר

אפשרויות של מכנים אשר המכנה המשותף שלהם הוא המכנה הנתון). משימה זו נועדה לעודד ולפתח חשיבה יצירתית מתוך שיתוף פעולה בין תלמידים. חשוב לעודד למציאת מספר רב של פתרונות. לדוגמה: הביטוי, ששימש מכנה משותף, ניתן לפירוק לגורמים הבאים:

$$6,\ x,\ (x+3) \qquad 3x,\ 2(x+3)$$

$$6x,\ (x+3) \qquad 6,\ x(x+3)$$

$$3,\ 2,\ x,\ (x+3) \qquad 2,\ x,\ 3(x+3)$$

$$2x,\ 3(x+3)$$

הפעילות מיועדת לתלמידים ברמות שונות. היא מתאימה גם לתלמידים מתקשים אך לא רק להם, ויעילה במיוחד בהוראה אישית או בקבוצות קטנות, אך אפשר להעביר אותה גם כחלק משיעור בהוראה פרונטלית.

כפעילות סיכום נציג את "רביעיות מכנים בשברים אלגבריים", שמעלה את רמת התרגול הבסיסית. יש לגזור את רביעיות המכנים מן הלוח הימני ולהתאימן ללוח השמאלי כך שהמכנים יתאימו למכנים המשותפים של כל עמודה וטור.

$(a+b)^2$	$2ab$	$4a^2$	$a-b$	a^2-b^2	$6a^2$
ab	$8(a+b)$	b^2	$a+b$	a^3b	$b-a$
$a+b$	b^2-a^2	$3(b-a)$	$a-b$	$4b^2$	$2a^2b^2$
$16b^3$	a^2-b^2	$(a+b)^2$	a^2-b^2	$4(b-a)$	$8b$

$-12a^2(b^2-a^2)$						
$16b^3(a+b)^2(a-b)$						
$12a^2b^2(a+b)^2(a-b)$						
$8a^3b(b^2-a^2)$						
	$4a^2b^2(a+b)^2$	$8ab(a^2-b^2)$	$16a^3b^3(a^2-b^2)$	$-6a^2(b^2-a^2)$	$-12b^2(b^2-a^2)$	$8a^2b^2(a^2-b^2)$

לסיכום, פעילות זו מתמקדת במציאת מכנה משותף מתוך בדיקת כמה אפשרויות לפתרון המשימה. לאחר בחירה בכיוון מסוים לפתרון יש לבדוק אם הכיוון המתפתח הוא הרצוי והנכון לפתרון, ואז לדון בו. כאמור, מטה־קוגניציה היא הפעולה של הערכה ושיקוף של מה שאדם חושב (Schoenfeld, 1992). אפשר לראות כי פעילות זו של מציאת מכנה משותף מאפשרת התנסויות וחוויות מטה־קוגניטיביות. המשימות שהוצגו למתכַּשרים להוראה בתחילה הציפו ידע קיים כדי להעלות את רמת ידיעותיהם על דרכי החשיבה שלהם. בהמשך הובילו המשימות לשינוי דרכי החשיבה בעקבות משוב עצמי. הפעילויות אפשרו להבחין בין הקוגניציה ובין המטה־קוגניציה.

במושג מכנה משותף הקוגניציה היא זכירה של האלגוריתם לחישוב המכנה המשותף, והמטה־קוגניציה היא האסטרטגיות שבהן אנו מלמדים את עצמנו מתוך הבנה את האלגוריתם לחישוב המכנה המשותף. בניית הפעילויות על ידי המתכשרים להוראה תורמת להבנת הבעיה, ולא על ידי הבאת פתרון מלא ומלוטש שהוכן מראש כמו שמקובל. במליאת הכיתה התקיימו דיונים, וכדי להגביר את המודעות העצמית פתרו הסטודנטים משימות שחיברו עמיתיהם, שכן ללא מודעות עצמית אין סיכוי לשנות תפיסות. אפשר לומר כי רוב המחקרים מצאו כי שימוש בשיטות מטה־קוגניטיביות משפר את הישגי הלומדים, ועל כן נבנה רצף פעילויות בנושא המכנה המשותף היוצר פעילות מטה־קוגניטיבית דו־שלבית: (א) ביסוס התחום המספרי; (ב) הרחבה לתחום האלגברי.

באמצעות הפעילות אפשר לחזק ולבסס מושגים מתמטיים כמו פירוק לגורמים, סימני התחלקות, כפולה משותפת ופעולות בשברים. פעילות מסוג זה תורמת לרכישת מיומנות בחישובים של תכנים מתמטיים שונים; לעידוד הלומדים לבצע חישובים מהירים ויעילים; להבנת הנחיצות בבקרה, באיתור טעויות, ובהכרת שיטות בקרה; לבחינת מגוון דרכי הפתרון המוצעות ודיון ביתרונות ובחסרונות של כל אחת מהן; לשיפור פעילות הילוך לאחור: פירוק למרכיבים וצירוף מחדש ביניהם; להעלאת השערות ברמה אינטואיטיבית; ולהסקת מסקנות והעמקת התובנות המתמטיות.

מקורות

משרד החינוך, **2012. תוכנית הלימודים החדשה לכיתות ז׳, ח׳, ו-ט׳**, המזכירות הפדגוגית, אגף מדעים, הפיקוח על הוראת המתמטיקה.

Bassan-Cincinatus, R. and Patkin, D., 2015. "Determining the Lowest Common Denominator," *Learning and Teaching Mathematics, Journal of AMESA* 19: 10–12.

Carver, C. S., 2003. "Pleasure as a Sign You Can Attend to Something Else: Placing Positive Feelings within a General Model of Affect," *Cognition and Emotion* 17, pp. 241–261.

Efklides, A., 2001. "Metacognitive Experiences in Problem Solving: Metacognition, Motivation, and Self-Regulation," in: A. Efklides, J. Kuhl, and R. M. Sorrentino (eds.), *Trends and Prospects in Motivation Research*, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, pp. 297–323.

Efklides, A., 2006. “Metacognition and Affect: What Can Metacognitive Experiences Tell **Us** about the Learning Process?” *Educational Research Review* 1: 3–14.

Garofalo, J. and Lester, F. K., 1985. “Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance,” *Journal for Research in Mathematics Education* 16: 163–176.

Koriat, A. and Levy-Sadot, R., 1999. “Processes Underlying Metacognitive Judgments: Informationbased and Experience-Based Monitoring of One’s Own Knowledge,” in: S. Chaiken and Y. Trope (eds.), *Dual-Process Theories in Social Psychology*, New York, NY: Guilford Press, pp. 483–502.

Schoenfeld, A. H., 1987. “What’s All the Fuss about Metacognition?” in: A. H. Schoenfeld (ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*, Hillsdale, NJ: Erlbaum, pp. 189–215.

Schoenfeld, A. H., 1992. “Learning to Think Mathematically,” in: D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Reserch in Mathematics Teaching and Learning*, New York: Macmillan, pp. 334–370.

Tirosh, D. and Tsamir, P., 1997. “Metacognition and Consistency: The Case of Infinity,” *Mathematics* 33: 321–330.

Zohar, A., 1994. “Teaching a Thinking Strategy: Transfer Across Domains and Self Learning versus Classlike Setting,” *Applied Cognitive Psychology* 8 (6): 549–564.

Zohar, A., 1996. “Transfer and Retention of Reasoning Skills Taught in Biological Contexts,” *Research in Science and Technological Education*, 14 (2): 205–219.

Zohar, A. and Ben-David, A., 2008. “Explicit Teaching of Meta-Strategic Knowledge in Authentic Classroom Situations,” *Metacognition and Learning* 3 (1): 59–82.

ronit.bassan@smkb.ac.il
patkin@netvision.net.il