התובנה המתמטית של מורים ופרחי הוראה למתמטיקה בבית הספר היסודי

תום סיון

תקציר

תכניות הלימודים ומחקרים רבים מצביעים על פיתוח התובנה המתמטית כאחת המטרות העיקריות של לימודי המתמטיקה בכיתות היסוד. התובנה המתמטית היא חלק חשוב במבחנים בין־לאומיים וארציים. הספרות מראה כי לתובנה המתמטית, הנקראת לעתים גם "חוש מספרי" או "חוש מתמטי", יש הגדרות שונות, אך כולן מקשרות אותה ליכולת להבין את מבני הבסיס של האריתמטיקה – מספרים ופעולות חשבון. היבט נוסף שמצוין פעמים רבות הוא היכולת לפתור בעיות מתמטיות בגמישות וביצירתיות. במחקרים קודמים נמצא קשר הדוק בין הידע וההבנה של מורים לבין הישגי תלמידיהם.

מאמר זה מציג מחקר אשר בדק את התובנה המתמטית של מורים למתמטיקה בבתי ספר יסודיים ושל פרחי הוראה לקראת סיום לימודיהם במסלול התמחות בהוראת מתמטיקה לבית הספר היסודי. במחקר נעשה שימוש בשאלונים הלקוחים ממחקרים בין־לאומיים בנושא, וכן בכלים של מחקר איכותני. נוסף על בדיקת התובנה המתמטית, נשאלו המורים והמורות על הרקע שלהם ועל תרומת ההכשרה המקצועית לפיתוח התובנה המתמטית שלהם. ממצאי המחקר מלמדים על רמה

* המאמר נכתב בעקבות עבודה סמינריונית בהנחיית פרופ' דורית פטקין ממכללת סמינר הקיבוצים, ולא יכול היה להיכתב ללא תמיכתה ועזרתה, שעליהן אני מודה לה מאוד.

נמוכה של תובנה מתמטית בקרב מורים ופרחי הוראה שלא רכשו השכלה אקדמאית קודמת בתחומי המדעים המדויקים, ומעמיד בספק את האפקטיביות של הכשרת מורים בפיתוח התובנה המתמטית. הממצאים עקביים בכל התחומים שנבדקו בשאלון, ולא נמצאו הבדלים ניכרים בין הישגי הנבדקים בתחומי המספרים השלמים, השברים והמספרים העשרוניים. בקרב התת־קבוצה של מורים ומורות בעלי תובנה מתמטית מפותחת, נמצא שחלק ניכר מחברי הקבוצה לא קיבלו הכשרה מסודרת בהוראת המתמטיקה, והנחקרים מעידים שלהכשרתם לא היה חלק בפיתוח התובנה המתמטית שלהם. זהו מחקר ראשוני בהיקף מצומצם, שמעלה כיוונים להמשך מחקר ושאלות הנוגעות למבנה ההכשרה של מורי מתמטיקה ביסודי בישראל.

מילות מפתח: תובנה מתמטית, חוש מספרי, הכשרת מורים, הוראת מתמטיקה.

הקדמה

תכניות לימודים בארץ ובעולם מדגישות את החשיבות של פיתוח תובנה מתמטית[1] (משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006; NCTM, 2000). בשנים האחרונות מעסיק המושג תובנה מתמטית את קהילת החוקרים יותר ויותר, ומחקרים רבים בודקים את המסגרת התאורטית שלו, את ביטויי התובנה המתמטית בקרב תלמידים, ובשנים האחרונות – גם בקרב מורים ופרחי הוראה. במחקר השוואתי מקיף נמצא שתלמידים בעלי הישגים גבוהים נוטים להשתמש בתובנה מתמטית, ואילו תלמידים בעלי הישגים נמוכים לא משתמשים בה (Gray and Tall, 1994). בארץ נערכו מחקרים ספורים על תובנה מתמטית של תלמידים (Markovits and Pang, 2006; 2007), אך אף שהמורים הם המופקדים על פיתוח התובנה המתמטית, טרם נערך מחקר מסודר על התובנה המתמטית של מורים בישראל.

מחקר זה נערך בעקבות קריאת מאמר על מצב התובנה המתמטית של פרחי הוראה בנמיביה (Courtney-Clarke and Wessels, 2014). המסקנות העגומות על מצב פרחי ההוראה בנמיביה הניעו אותי לבדוק את המצב בישראל. המחקר הנוכחי מנסה לעמוד על רמת התובנה המתמטית של מורים ופרחי הוראה בישראל, ועל תרומת הכשרתם לתובנה המתמטית שלהם. לצורך מחקר

1 בספרות המקצועית בעברית נעשה שימוש במונחים המקבילים "חוש מספרי", "תובנה מספרית" ו"תובנה מתמטית". במאמר זה השתמשתי באופן בלעדי במונח "תובנה מתמטית".

זה השתמשתי בשאלונים של תובנה מתמטית ושל חישוב בכתב, ונוסף עליהם השתמשתי בכלים של מחקר איכותני לניתוח התשובות ולניתוח סיפורי החיים של המורים למתמטיקה. מהממצאים עולה כי פרחי ההוראה מציגים תובנה מתמטית נמוכה. בקרב המורים נמצאו שתי קבוצות מובחנות: קבוצה בעלת רמת תובנה נמוכה הדומה לזו של פרחי ההוראה, וקבוצה בעלת רמה גבוהה של תובנה מתמטית. בשתי הקבוצות יש הרבה מורים ללא הכשרה רלוונטית בתואר, ודרכי ההגעה שלהם לעיסוקם הנוכחי מגוונות. עם זאת, הקבוצות נבדלות זו מזו בגישת חבריהן למתמטיקה, בחוויות משנות לימודיהם בבתי הספר ובתפיסתם את תרומת ההכשרה המקצועית לתובנה המתמטית שלהם. המחקר שלהלן מצומצם וראשוני, אך מהממצאים העולים ממנו נראה כי נכון להיום מורים בעלי תובנה מתמטית פיתחו אותה ללא קשר להכשרתם, והכשרת המורים הנהוגה היום ככל הנראה אינה מפתחת תובנה מתמטית.

סקירת ספרות

התובנה המתמטית מקבלת בשנים האחרונות מקום יותר ויותר מרכזי בתכניות הלימודים, בסטנדרטים של מדינות ובמחקר העולמי. המועצה הלאומית של מורי המתמטיקה בארצות הברית (NCTM) מדגישה את חשיבות התובנה המתמטית במסמך העקרונות והסטנדרטים ללימודי המתמטיקה (NCTM, 2000), והיא מציינת אותה כאחד הרעיונות החשובים ביותר ללימודי המתמטיקה בכיתות היסוד, שכן היא מאפשרת לתלמידים (1) להבין מספרים, דרכים לייצוג מספרים, יחסים בין מספרים ואת מערכת המספרים; (2) להבין את המשמעות של פעולות וכיצד הן קשורות זו לזו; (3) לחשב באופן שוטף ולהשתמש באומדן סביר (שם, 32).

בתכנית לימודי המתמטיקה ליסודי בארץ מוצג פיתוח התובנה המתמטית כיעד חשוב שיש לטפחו בכל גיל. התובנה המתמטית, לפי התכנית, "מתבטאת בראייה אינטואיטיבית של מבנים מתמטיים ובקישורם לפעולות חשבון, בתחושה שקיים קשר בין דברים, ביכולת גיוס ידע וניסיון קודם על מנת לפתח אסטרטגיות פתרון שונות, בהבנת דרכי פתירה שונות ובגילוי פתיחות לדרכים חדשות" (משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006, 11). בתכנית מודגש ההיבט האישי של התובנה המתמטית, שמאפשר לאנשים שונים לפתור את אותה משימה בדרכים שונות. זוהי תפיסה שונה מהתפיסה המסורתית של מתמטיקה כמקצוע נוקשה בעל חוקים חד־משמעיים, והיא מעודדת את הלומדים והלומדות לחוש חיבור

אישי יותר לנושא.

בסקירה של מאמרים העוסקים בנושא נמצא שלעומת ההסכמה הרחבה על חשיבות התובנה המתמטית (Markovits et al., 1989; Greeno, 1991), אין הסכמה על עצם הגדרת המושג. פוקנר (Faulkner, 2009) מציינת שאף שבשנים האחרונות תכניות הלימודים שמות דגש על פיתוח התובנה המתמטית של התלמידים, לא ניתן למורים הסבר ברור מהי התובנה המתמטית ואיך אפשר לאבחן אותה. פוקנר מצביעה על אומדן כעל מאפיין מקובל של התובנה המתמטית, והיא מנסה לבחון מה מאפשר לאדם לפתח יכולת אומדן: מושגים ותפיסה של גודל וכמות, וכן היגיון של חשיבה יחסית (פרופורציונלית). כהגדרה לתובנה המתמטית היא מציגה מודל של מעגל שבמרכזו השפה שבה אנו מדברים על המתמטיקה וחושבים מתמטיקה, ומסביב לו פלחים של מושגי יסוד: גודל/כמות, חשיבה אלגברית וגאומטרית, היגיון יחסי (חשיבה פרופורציונלית), צורת המספר, בסיס 10, שוויון ומספור (קונבנציות של שיטת המספור).

מחקר מרכזי בתחום (Kalchman et al., 2001) מציע הגדרה מקיפה למושג התובנה המתמטית, וכן מסגרת תאורטית להתפתחותה. החוקרים מציינים חמישה מאפיינים של התובנה המתמטית: (1) שליטה בהערכת סדרי גודל; (2) יכולת לזהות תוצאות לא סבירות; (3) גמישות בחישוב מנטלי (ללא עזרים); (4) היכולת לנוע בין ייצוגים שונים של כמויות וגדלים, ולבחור בייצוג המתאים ביותר למצב הנתון; (5) יכולת לייצג את אותו מספר או אותה פונקציה בדרכים שונות, כתלות בהקשר ובמטרה.

קלצ׳מן ואחרים מניחים שהתובנה המתמטית תלויה בקיום של סכמה מארגנת חזקה של ״מבנים מושגיים מרכזיים״. אפשר לראות מבנים אלו כרשת מורכבת של מושגים, וכן הקשרים ביניהם, היחסים והפעולות שקשורים אליהם. רשת מושגית זו עוזרת לחשוב על הבעיות ולהשיג הבנה עמוקה יותר של התחום. במאמרם הם מציעים שהמבנה המרכזי מתפתח משילוב, זה על גבי זה, של שני מבנים נפרדים ואינטואיטיביים: (1) מספרי, מילולי, רציף; (2) כמותי־ייצוגי (אנלוגי), מרחבי, לא רציף.

במחקר שלפניכם נעשה שימוש בהגדרה של יאנג (Yang, 2005), אשר מציין חמישה רכיבים לתובנה המתמטית, בהתבססו על מחקרים קודמים ועל הגדרות NCTM. ההגדרה הזאת מספקת חמישה רכיבים מדידים, הניתנים לבדיקה בכלים קיימים, ולכן היא נבחרה לשימוש במחקר הנוכחי: (1) הבנת המשמעות הבסיסית של המספרים; (2) זיהוי סדרי גודל; (3) שימוש נכון בתרגילים ובגדלים

מוכרים כאמצעי עזר לתרגילים אחרים (benchmarks); (4) הכרת ההשפעות היחסיות של הפעולות על המספרים; (5) שימוש נאות באסטרטגיות לפתרון בעיות מספריות, כולל אומדן, חישוב בעל פה וכו', ויכולת להעריך את מידת ההיגיון של התוצאות.

חשוב להבחין בין הראייה האינטואיטיבית שמאפיינת את התובנה המתמטית לבין הרכיב האינטואיטיבי שעליו כותב פישביין (פישביין, 2004). פישביין כותב על המתמטיקה כפעילות אנושית (בניגוד לידע המתמטי עצמו) המורכבת משלושה רכיבים: ההיבט הפורמלי, ההיבט האלגוריתמי וההיבט האינטואיטיבי. אולם לעומת האינטואיציה שפישביין מזכיר, שהיא האינטואיציה הראשונית, המיָדית, שמובילה קרובות פעמים רבות לטעויות במתמטיקה שנראות ללומד/ת נכונות מיָדית, האינטואיציה המתמטית שהיא חלק מהתובנה המתמטית היא אינטואיציה שנובעת מהתנסות בעולם המתמטי ועשויה דווקא לפתור את הבעיות שיצרה האינטואיציה המקורית של הלומד/ת. כדברי פישביין: "כדי להתגבר על טעויות כאלה התלמיד צריך להגיע להבנה מלאה של היחסים בין המרכיבים הפורמאליים לבין המרכיבים האלגוריתמיים של המתמטיקה" (שם, 12). הבניה של תובנה מתמטית דורשת הבנת עומק של הנושאים ויצירת רשתות של קשרים בין הפורמלי לאלגוריתמי.

החוקרות הנמיביות קורטני־קלארק וויסלס מסכמות זאת באופן הבא: "הרעיון של תובנה מתמטית מגלם בתוכו את רוב המושגים, המיומנויות והגישות שלומד צריך לרכוש בבית הספר היסודי כבסיס להמשך לימודי המתמטיקה ופיתוח אוריינות כמותית" (Courtney-Clarke and Wessels, 2014, 2).

חשיבות התובנה המתמטית להוראת המתמטיקה

במחקר מקיף שנעשה על הידע המתמטי הדרוש להוראה מצאו היל ואחרים (Hill et al., 2005) קשר ברור בין הידע המתמטי של המורים לבין הצלחת תלמידיהם כבר בכיתה א'. ממורה בכיתה נדרש יותר מאשר לדעת איך לפתור את התרגיל. על המורה לדעת לזהות שגיאות ומנין הן נובעות, להציג מודלים שונים לבעיות המתמטיות ולבחור בייצוג הנכון ביותר לסיטואציה, לדעת להעריך דרכים חלופיות לפתרון, שעולות מהכיתה, ולהבין לעומק את העקרונות המתמטיים שמאחורי האלגוריתמים הנלמדים (Ball et al., 2005). דרישות אלו עולות בקנה אחד עם התובנה המתמטית, ואפשר לשער שמחקר ממוקד בתובנה המתמטית ימצא מתאם בין התובנה המתמטית של המורים לבין הישגי תלמידיהם. עם זאת,

בעשרות המחקרים שנסקרו לצורך מחקר זה לא נמצא מחקר שמתמקד בקשר בין התובנה המתמטית של המורים להישגי תלמידיהם.

התובנה המתמטית של תלמידים בישראל

במסקנות ממבחני המיצ"ב במתמטיקה לכיתה ה' (משרד החינוך, 2010) עולה קושי בשאלות המערבות תובנה מתמטית, גם אחרי הדגש שניתן לכך בתכנית הלימודים החדשה. במספרים השלמים "בשאלות בהן נדרש פתרון המבוסס על תובנה חשבונית ניתן לראות שיפור ניכר, יחסית לשנים הקודמות. יחד עם זאת נראה שבמקרים רבים התלמידים נאחזים בפתרון אלגוריתמי מורכב, ואינם משתמשים באמדן או באסטרטגיה אחרת לייעול דרכי הפתרון" (שם, 1). גם בתחום השברים, "תרגילים מורכבים, משוואות ותרגילים שפתרונם מבוסס על תובנה חשבונית [...] נכללים בין הנושאים והמיומנויות שהשליטה בהם בינונית או נמוכה" (שם, 2).

מאפייני המורה למתמטיקה ביסודי

במחקר שהוגש לוועדת החינוך, התרבות והספורט של הכנסת (וורגן, 2008) נמצא כי יש מחסור במורים בעלי הכשרה במתמטיקה בכל הרמות. המחסור חמור בייחוד בחינוך היסודי: בשנת הלימודים תשס"ו (2005/06) היו 9,403 מורים למתמטיקה, מהם 66% אקדמאים בעלי תואר ראשון ומעלה, אך רק 18.3% בעלי הכשרה במתמטיקה. בשנת הלימודים תשע"ג (2012/13) כ-60% ממורי המתמטיקה בחינוך היסודי לא הוכשרו במקצוע שהם מלמדים (משרד מבקר המדינה, 2014). מספר הסטודנטים המכשירים את עצמם להוראת מתמטיקה (בכל הרמות) אינו מספק, ומנגד, רוב מי שהכשירו את עצמם להוראת מתמטיקה בחינוך היסודי אינם מועסקים כמורים למתמטיקה. כדי לשפר את המצב הופעלה לכמה שנים תכנית התמקצעות למורים במתמטיקה בבית הספר היסודי. היקף הלימודים הראשוני נקבע ל-360 שעות על פני שלוש שנים, אך ירד בהדרגה. ציון "עובר" הראשוני נקבע ל-80, אך ירד ל-75 עקב מספר גבוה של נכשלים. בין השנים תשס"ד לתשס"ו סיימו את התכנית בהצלחה 2,756 מורים ומורות.

במחקר (גוברמן, 2007; 2014) שנעשה על מתמחים בהוראת המתמטיקה מארבע מכללות אקדמאיות בארץ נבדקו רמות החשיבה האריתמטיות של מתכשרים ומתכשרות להוראה ביישום של רמות החשיבה של ואן־הילה לאריתמטיקה. במחקר נמצאו קווי דמיון גדולים בין הרמה השלישית של החשיבה

לבין ההגדרות של תובנה מתמטית: ברמה השלישית, הנקראת לפי הסיווג של ואן־הילה הרמה המופשטת,[2] מצאה גוברמן שיש ללומדים/ות מודעות לתכונות שמאפיינות קבוצות מספרים, יכולת לטעון טיעונים לא פורמליים, יכולת להסיק מסקנות מנתונים בדרכים שונות, להסביר צעדים בפתרון שלהם בצורה סבירה ולבצע אינטגרציה בין נתונים. לאחר קורס באריתמטיקה במכללות היו 19% מהנבדקים ברמה הראשונה או מתחתיה, 39% ברמה השנייה, 12% ברמה השלישית, ורק 30% ברמה הרביעית. כלומר, לפי המחקר, רק 42% מהמורים והמורות שקיבלו הכשרה מתאימה להוראה במכללות מסוגלים "לקשר בין תכונות המספרים לבין התכונות של פעולות החשבון [...] לטעון טיעונים בלתי־פורמליים ולבססם באמצעות נימוקים לא פורמליים: שימוש בדוגמא גנרית, שימוש חלקי בכלים אלגבריים ועוד" (גוברמן 2007, 129). מכאן אפשר להסיק שלפחות 58% מהמתכשרים/ות להוראה במחקרה של גוברמן לא ביטאו תובנה מתמטית.

לסיכום, התובנה המתמטית היא מושג חדש יחסית בהוראת המתמטיקה, שנעשה מרכזי יותר עם השנים. נכתבים עליו מחקרים רבים, אך עדיין אין הגדרה אחת המוסכמת על כולם. משרדי החינוך ברחבי העולם שמים דגש על הקניית תובנה מתמטית, אולם עדיין לא ברור עד כמה המורים בארץ בימינו ניחנים בתובנה מתמטית ומסוגלים להקנות אותה, בשל חוסר גדול במורים בעלי הכשרה מתאימה.

מתודולוגיה מחקרית

מחקר זה הוא מחקר ראשוני בנושא התובנה המתמטית של המתכשרים/ות להוראת המתמטיקה ושל מורי מתמטיקה בכיתות היסוד של בית הספר היסודי. מטרת המחקר העיקרית היא לבדוק את התובנה המתמטית של המתכשרים/ות להוראת מתמטיקה במכללות לקראת סוף לימודיהם (שנה ד', שהיא שנת הסטאז') ושל מורי מתמטיקה בכיתות היסוד, לפי חמשת המאפיינים שהגדיר יאנג (Yang, 2005). שאלות המחקר היו:

1. האם מורים בבית הספר היסודי ומתכשרים/ות להוראה בבית הספר

2 לקריאה נוספת על תאוריית ואן־הילה, שמתייחסת לרמות החשיבה של לומדים בגאומטריה, ראו Burger and Shaughnessy, 1986.

היסודי לקראת סוף לימודיהם מראים יכולות הקשורות לתובנה מתמטית?

2. האם מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי ומתכשרים/ות להוראה בבית הספר היסודי משתמשים בנימוקים של תובנה מתמטית?
3. מהי התרומה של הכשרת המורים לפיתוח התובנה המתמטית שלהם מזווית הראייה האישית שלהם?

מחקר זה הוא מחקר איכותני עם היבטים כמותיים.

אוכלוסיית המחקר, שנערך בשני שלבים, כללה 28 נבדקים ונבדקות. בקבוצת המחקר היו 5 גברים, ולכן אתייחס לקבוצות בלשון נקבה, ולנבדקים יחידים לפי המגדר הרלוונטי. בשלב הראשון השתתפו 18 סטודנטיות להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי במכללה במרכז הארץ, שלמדו בשנה ד׳ תוך כדי עבודה כמורות-מתמחות בהוראת המתמטיקה בסביבות מגוונות ברחבי הארץ. בשלב השני השתתפו 10 מורות למתמטיקה בבית הספר היסודי. כל המורות ממרכז הארץ, מלמדות בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי (ה׳-ו׳) וחלקן גם בכיתות אחרות. ותק המורות נע בין שנה לעשר שנים, וגילן עומד על 26-59. לכל הנבדקות אין רקע במתמטיקה מעבר ללימודים בבית הספר, לימודי הוראה (לחלקן) והשתלמויות. כלומר במחקר לא השתתפו מורות שלמדו במסלול של הסבת אקדמאים או בעלות תואר קודם במתמטיקה או במדעים מדויקים. הסטודנטיות נבחנו במבדק התובנה המתמטית בלבד, ועשו זאת במסגרת קבוצתית, כעבודת כיתה בקורס. המורות נבחנו במבדק התובנה המתמטית ובמבדק החישוב בכתב, ועשו זאת באופן אישי, עם תצפית על התהליך ותזמון מדויק של זמני המענה.

כל הנחקרות קיבלו מידע על מטרת המחקר ועל מסגרת הכתיבה שלו. פרטי הנחקרות נשארו חסויים, וכל הפרטים המזוהים טושטשו. נחקרות שרצו בכך קיבלו עותק ריק של השאלונים, וכן קיבלו עותק של המחקר המלא לאחר שהושלם. תוצאות המחקר נותרו חסויות בפני הנחקרות ובפני מקום עבודתן.

כלי המחקר כללו שני שאלונים (שאלון תובנה מתמטית שבו 40 שאלות ומבדק חישוב בכתב של 20 שאלות) וריאיון חצי־מובנה שנגע לרקע האישי והמקצועי של המורות, להבנתן את המושג "תובנה מתמטית" ולעמדותיהן בנוגע לתרומת ההכשרה המקצועית לפיתוח התובנה המתמטית שלהן. עוד הוצגו לנבדקות שאלות פתוחות בעל פה, שבהן התבקשו לנמק ולהסביר את דרכי הפעולה בפתרון השאלונים. את שאלון התובנה המתמטית ואת מבדק החישוב

בכתב פיתחו רייס ויאנג (Reys and Yang, 1998) לצורך מחקרם בטייוואן, והם תיקפו אותם. השאלונים תורגמו לעברית לצורך מחקר זה. שאלות הריאיון שאבו השראה מעבודתו של יאנג (Yang, 2005) וכן מעבודתם של החוקרים טסאו ולין, גם הם מטייוואן (Tsao and Lin, 2012). בניגוד למחקר הנמיבי (Courtney-Clarke; Wessel, 2014), השאלות בשאלונים לא שונו, מכיוון שהן תואמות את תכנית הלימודים לבית הספר היסודי בארץ. עם זאת, בכמה פריטים נעשתה התאמה לנבדקות בישראל, כגון שינוי שמות לשמות ישראליים ובחירת שמות רב-לאומיים (שמות שקיימים גם במגזר הערבי, כמו נעמי) או שמות לא מגדריים (שמתאימים לבנים וגם לבנות), כמו דניאל ומיקי. בשאלה אחת הוחלפה המילה פיצה בפלאפל, ובשאלות אחרות שונו יחידות המידה: הכסף הפך לשקלים, ו-cubic feet למטרים מעוקבים.

שאלון התובנה המתמטית כולל **40** פריטים שבהם נדרשים הנבדקים להגיע לתשובה הנכונה בלי חישוב מלא בכתב. המבדק כולל פריטים מתחום המספרים השלמים (עד עשרות אלפים), שברים, מספרים עשרוניים ואחוזים. הוא כולל את ארבע פעולות החשבון ודורש ידע בסדר פעולות החשבון והבנת חוק החילוף בחיבור ובכפל. בארבעה פריטים יש שימוש בהצגה חזותית של השאלה, ובפריט אחד מתוכם יש צורך בידע גאומטרי מינימלי (שטח והיקף של ריבוע). המבדק כולל חומר לימוד המכוסה כולו בתכנית הלימודים עד כיתה ו', אך הוא דורש חשיבה ברמה גבוהה ומחשבה יצירתית, ולמעשה כולל את כל רכיבי החוש המספרי.

מבדק החישוב בכתב כולל **20** פריטים שמקבילים ל-**20** הפריטים הראשונים בשאלון התובנה. במבדק זה התבקשו המשתתפות במחקר לפתור את התרגילים ולהציג דרך מלאה, עם ההנחיה לעשות זאת כאילו היו תלמידים בכיתה ו', כלומר לכתוב ברמת הפירוט שלה הן מצפות מתלמידיהן.

דוגמה להקבלות ולשוני בין שני המבדקים אפשר לראות בפריטים המובאים בלוח **1** – פעם משאלון התובנה ופעם ממבדק החישוב.

לוח 1: פריטים לדוגמה משאלון התובנה המתמטית וממבדק החישוב

פריט 1		
תובנה	1) בלי לחשב במדויק, הקיפו את התשובה הנכונה ביותר, לפי האומדן שלכם. כמה הם: 36×0.96?	א. יותר מ-36 ב. פחות מ-36 ג. בדיוק 36 ד. בלתי אפשרי לדעת בלי לחשב
חישוב	1) $36 \times 0.96 =$ ______	שלבי החישוב:
פריט 2		
תובנה	2) בלי לחשב במדויק, הקיפו את התשובה הנכונה ביותר, לפי האומדן שלכם. כמה הם: $\frac{7}{16} \times \frac{21}{32}$?	א. יותר מ- $\frac{21}{64}$ ב. פחות מ- $\frac{21}{64}$ ג. בדיוק $\frac{21}{64}$ ד. אי אפשר לדעת בלי לחשב
חישוב	$\frac{7}{16} \times \frac{21}{32} =$ ______	שלבי החישוב:

בלוח 2 להלן מוצגת חלוקת הפריטים בשאלון לפי הרכיבים של התובנה המתמטית שהם בודקים, וכמה פריטים לדוגמה. חלוקה זו נעשתה לפי הגדרת התובנה המתמטית של יאנג (Yang, 2005). פריטים שבודקים יותר מרכיב אחד מופיעים בכמה קטגוריות.

לוח 2: מיפוי שאלון התובנה המתמטית

רכיבי התובנה המתמטית	מספר הפריטים בשאלון			פריט לדוגמה
	מספרים שלמים	שברים פשוטים, מדומים ומעורבים	מספרים עשרוניים ואחוזים	
הבנת המשמעות הבסיסית של המספרים	2	10	7	15) איזה שבר קרוב יותר בערכו ל- $\frac{1}{2}$: $\frac{3}{8}$ או $\frac{7}{13}$? כתבו את התשובה הנכונה והסבירו למה.
זיהוי סדרי גודל	4	2	4	21) איזו סדרת מספרים **שגויה**? א. 4500, 4000, 3500, 3000 ב. 7900, 7800, 7700, 7600 ג. 7000, 6099, 6098, 6097 ד. 8110, 8100, 8090, 8080
שימוש נכון בתרגילים ובגדלים מוכרים כאמצעי עזר לתרגילים אחרים (benchmarks)	3	4	3	10) העריכו בערך מהו המספר החסר: 270 = ____ x 4.5
הכרת ההשפעות היחסיות של הפעולות על המספרים	2	3	5	1) בלי לחשב במדויק, הקיפו את התשובה הנכונה ביותר, לפי האומדן שלכם. כמה הם: 0.96 x 36? א. יותר מ-36 ב. פחות מ-36 ג. בדיוק 36 ד. בלתי אפשרי לדעת בלי לחשב
שימוש נאות באסטרטגיות לפתרון בעיות מספריות, כולל אומדן, חישוב בעל פה וכו', ויכולת להעריך את מידת ההיגיון של התוצאות	8	4	8	13) העריכו - איזה מהתרגילים ייתן תוצאה קרובה ביותר לתוצאת התרגיל 86 x 38? הקיפו את התשובה והסבירו למה. א. 90 x 40 ב. 86 x 40 ג. 90 x 38 למה?

ריאיון – המורות למתמטיקה משלב המחקר השני גם רואיינו בריאיון עומק חצי־מובנה, בהשראת מאמרם של טסאו ולין (Tsao and Lin, 2012). השאלות כללו רקע אישי, השכלתי ומקצועי, שאלה על היכרותן עם המושגים "חוש מספרי" או "תובנה מתמטית" (שני המונחים הוצגו יחד, מכיוון שהנבדקות היו עשויות להיחשף לכל אחד מהם), שאלות על ילדותן – שנות לימודיהן בבית הספר, בדגש על היחס שלהן ללימודי המתמטיקה, ושאלה על תרומת ההכשרה המקצועית לפיתוח התובנה המתמטית שלהן. נוסף על כך, נערכה תצפית על דרך ההתמודדות עם הפריטים במבדקים, ולאחר מכן נשאלו המורות שאלות על חלק מהפריטים. השאלות שאבו את השראתן מהמאמר של יאנג (Yang, 2005), כגון: אנא נמקי את התשובה; אנא אמרי לי את הסיבה לכך; אנא ספרי לי איך הגעת לתשובה זו; האם תוכלי לעשות זאת בדרך נוספת?; למה עשית זאת בדרך הזו? כשהמורות נמנעו מלענות על פריט מסוים הן נשאלו בתום הריאיון מדוע בחרו לדלג עליו.

כלי הניתוח

שאלוני התובנה המתמטית של הסטודנטיות נותחו בכלים בסיסיים: מספר התשובות הנכונות וממוצע התשובות הנכונות לסטודנטית ולכל שאלה בנפרד. לאחר מכן נותחו סוגי הטעויות הנפוצות ונותחו סוגי השאלות שבהן טעו חצי מהנבדקות ומעלה. הועלו השערות על הסיבות לשגיאות אלו, בהתבסס על ההיכרות עם תכנית הלימודים ועל מחקרים בנושא קוגניציה של למידת מתמטיקה, שגיאות נפוצות ומחקרים בנושא החוש המספרי.

שאלוני המורות נותחו באותו אופן והשוו למבדקי החישוב. ניתוח השאלות נעשה בעזרת המידע שהתקבל מהתשאול הישיר של המורות ומהתצפית. ניתוח הריאיון החצי־מובנה נעשה בכלים של ניתוח נרטיבי בגישה פרשנית (שקדי, 2003).

שלב ראשון: העברת השאלון לקבוצת הסטודנטיות

תחילה הועבר שאלון התובנה המתמטית לקבוצה של 18 וסטודנטיות. השאלון הועבר באופן קבוצתי, תחילה ללא הגבלת זמן, אך בתום שעה הן קיבלו הנחיה להזדרז ולסיים. 6 מהנבדקות לא סיימו את שאלון התובנה המתמטית ולא הגישו אותו, ולכן נותחו רק 12 שאלונים שמולאו בשלמות.

שלב שני: העברת המבדק לקבוצת המורות

המבדקים לקבוצת המורות הועברו באופן יחידני. הפגישות היו אישיות והתקיימו בבית הספר, בבית החוקרת או בבתי קפה. לאחר הריאיון המקדים ניתן להן שאלון התובנה המתמטית. נאמר להן שמוקצות 45 שניות לכל שאלה. החוקרת ישבה על יד כל נבדקת עם שעון עצר, מדדה את הזמן ותיעדה את דרכי הפתרון. כאשר עברה הנבדקת לשאלה הבאה אופס השעון, גם אם נותר עוד זמן. לאחר סיום המבדק נשאלו הנבדקות על דרכי הפתרון של שאלות מסוימות, ולאחר מכן הן התבקשו לפתור את מבדק החישוב בכתב, שלו הוקצו 30 דקות, כפי שיאנג הקצה לתלמידי כיתה ו'. כל המורות עמדו בזמנים.

ממצאים

שאלת המחקר הראשונה הייתה אם מורים בבית הספר היסודי ומתכשרים/ות להוראה בבית הספר היסודי לקראת סוף לימודיהם מראים יכולות הקשורות לתובנה מתמטית. נמצא שיש הבדלים משמעותיים בין קבוצת המורות לקבוצת הסטודנטיות בתחום התובנה המתמטית. למורות יכולות גבוהות יותר בתחום התובנה המתמטית, וכן הן משתמשות יותר בנימוקים שמדגימים תובנה מתמטית. בתוך קבוצת המורות אפשר לזהות שתי קבוצות השונות מאוד זו מזו בהישגיהן, והקבוצה עם ההישגים הנמוכים קרובה בהישגיה להישג הממוצע של הסטודנטיות. לא נמצא קשר בין ההישגים להכשרה המקצועית, אך המורות שהצליחו יותר בשאלון התובנה המתמטית דיווחו על הישגים טובים וחיבה למקצוע מגיל צעיר, לעומת הקבוצה בעלת ההישגים הנמוכים, שדיווחה על חשש מהמקצוע. המורות שהצליחו ביותר במבדקים לא דיווחו על קשר משמעותי בין התפתחות התובנה המתמטית שלהן ובין הכשרתן, אך המורות מהקבוצה בעלת ההישגים הנמוכים ייחסו תועלת מסוימת, אם כי קטנה, להכשרתן.

מבדק החישוב בכתב לא היה רלוונטי לשאלות המחקר, ולכן לא נותח לעומק בפני עצמו, אלא שימש בעיקר כדי לשפוך אור נוסף על אסטרטגיות הפתרון הזמינות לנבדקות בשאלון התובנה המתמטית. יש לזכור שקבוצת הסטודנטיות נבחנה רק בשאלון התובנה המתמטית.

בכל שלבי ניתוח התוצאות לא נותחו הבדלים מגדריים. סיבה אחת לכך היא המדגם הקטן, שכלל רק 4 גברים בקבוצת המורות וגבר אחד בקבוצת הסטודנטיות. סיבה שנייה היא שבמחקרים מהשנים האחרונות נראה שאין קשר בין המגדר לבין התובנה המתמטית (Leung, 2007, 78–79).

במבדק התובנה המתמטית רק 12 מתוך 18 הסטודנטיות סיימו את השאלון בתוך שעה (זמן כפול משהוקצה למורות). הציון הממוצע של 12 הסטודנטיות שהגישו את השאלון היה 59.87%. טווח הציונים נע בין 28.95 ל-84.21, ורק 3 (25%) קיבלו מעל 70. מתוך 38 פריטים,[3] על 14 פריטים ענו נכונה 50% ומטה מהנבדקות, ורק על 8 ענו נכון יותר מ-80%. לעומתן, מצב המורות למתמטיקה היה טוב יותר. כל המורות סיימו את השאלון בתוך חצי שעה, עם ציון ממוצע של 73.5%. מתוך 40 פריטים, על 9 ענו נכון 50% או פחות מהנבדקות, ועל 22 פריטים ענו נכון 80% או יותר. הפער לטובת המורות היה עקבי ומובהק. בלוח 3 אפשר לראות את סיכום התוצאות לפי תחומי התובנה המתמטית.

לוח 3: סיכום תוצאות מבדק התובנה המתמטית

רכיבי התובנה המתמטית	מספר פריטים בשאלון	ממוצע באחוזים, פרחי הוראה	ממוצע באחוזים, מורות/ים	ממוצע כללי באחוזים	פער באחוזים בין המורות/ים לפרחי ההוראה
הבנת המשמעות הבסיסית של המספרים	18	69.27	81.94	75.61	12.67
זיהוי סדרי גודל	9	62.96	79.17	71.06	16.20
שימוש נכון בתרגילים ובגדלים מוכרים כאמצעי עזר לתרגילים אחרים	10	57.50	77.50	67.50	20.00
הכרת ההשפעות היחסיות של הפעולות על המספרים	10	59.17	67.50	63.33	8.33
שימוש נאות באסטרטגיות לפתרון תרגילים, כולל אומדן, חישוב בעל פה וכו', ויכולת להעריך את מידת ההיגיון של התוצאות	17	50.00	63.24	56.62	13.24

3 שני פריטים נפסלו בגרסה שניתנה לסטודנטיות בשל ניסוח לא ברור בגרסה הראשונית של השאלון, ותוקנו בגרסה המאוחרת יותר, שניתנה לקבוצת המורות בשלב השני של המחקר.

בקבוצת המורות לא נמצא פער ניכר או עקבי בין תוצאות שאלון התובנה המתמטית למבדק החישוב בכתב. הציון הממוצע של קבוצת המורות במבדק החישוב היה מעט נמוך יותר מאשר בשאלון התובנה המתמטית ועמד על 70%, אך בהשוואה שנעשתה לכל נבדקת בנפרד ולכל פריט בנפרד לא נמצא דגם עקבי.

בחלוקה לפריטים בקטגוריות שונות – מספרים שלמים, שברים ומספרים עשרוניים – לא נמצאו הבדלים מובהקים. בלוח 4 אפשר לראות את שיעור התשובות הנכונות לכל קטגוריה. בחלוקה זו לא נכללו 6 פריטים שדרשו אינטגרציה בין סוגי מספרים שונים.

לוח 4: שיעור התשובות הנכונות לפי קטגוריה

	ציון ממוצע	שלמים	שברים	עשרוניים
פרחי הוראה – תובנה	59.87	67.59	59.72	66.67
מורים/ות – תובנה	72.81	76.39	75.96	76.04
מורים/ות – חישוב	70	68.33	71.43	70

ההישגים בפריטים האינטגרטיביים (ששילבו כמה סוגי מספרים – שלמים, שברים ומספרים עשרוניים או אחוזים) היו נמוכים במיוחד. גם כאן מצב המורות היה מעט טוב יותר משל הסטודנטיות. בלוח 5 אפשר לראות את שיעור העונות נכונה בכל פריט אינטגרטיבי.

לוח 5: שיעור העונות נכונה בפריטים אינטגרטיביים

מספר פריט	פרחי הוראה אחוז העונות נכונה	מורות אחוז העונות נכונה
27	8.33	37.5
31	25	50
32	75	75
34	25	50
35	33.33	25
37	50	87.5
ממוצע תשובות נכונות (באחוזים)	**36.11**	**54.17**

הממצאים מראים שהסטודנטיות ממעטות להשתמש בתובנה מתמטית לפתרון בעיות. מצב המורות טוב יותר, אך יש ביניהן הבדלים גדולים (סטיית תקן 15.82). ציוני המורות במבדק החישוב נעו בין 45 ל-100, ובמבדק התובנה המתמטית – בין 57.5 ל-95. מכאן שמדובר בקבוצה הטרוגנית מאוד.

ניתוח של נתוני המבדקים ונתוני הראיונות הראה שאפשר לזהות בקבוצת המורות שתי קבוצות מובחנות. קבוצה אחת, שכללה 4 מורות, הייתה בעלת הישגים גבוהים בשני המבדקים. בשאלון התובנה נעו ציוניה בין 82.5 ל-95, עם ממוצע של 90.62. במבדק החישוב בכתב היה ממוצע הציונים של קבוצה זו 88. הקבוצה השנייה כללה 5 מורות והייתה בעלת הישגים נמוכים. הציונים של קבוצה זו בשאלון התובנה המתמטית נעו בין 57.5 ל-67.5, עם ממוצע של 60, בדומה לתוצאות של הסטודנטיות להוראה. ממוצע הציונים של קבוצה זו במבדק החישוב בכתב היה 55. הקבוצות היו שונות זו מזו בדרכי הפתרון, בנימוקים ובריאיון. במאמר זה נקרא לקבוצה בעלת ההישגים הגבוהים קבוצה A ולקבוצה בעלת ההישגים הנמוכים קבוצה B. בחלוקה זו לא נכללה מורה אחת שהייתה בין שתי הקבוצות (ציון 72.5 בשאלון התובנה המתמטית), שכן היא לא התאימה לדפוסי דרכי הפתרון, וכן, בהיותה מהגרת, נתקלה במחסום שפה שהקשה על הריאיון.

מה מבדיל בין המורות מקבוצה A למורות מקבוצה B?

בהתאם לממצאים ברמה הארצית (וורגן, 2008; משרד מבקר המדינה, 2014), שתי הקבוצות מתאפיינות במיעוט מורות בעלות הכשרה פורמלית במקצוע, בהגעה מקרית ו"מתגלגלת" להוראת המתמטיקה ובהשתתפות נמוכה בהשתלמויות מקצועיות רלוונטיות. ההבדלים בנרטיבים של חברות הקבוצות השונות ניכרים בחוויות הילדות שלהן כתלמידות מתמטיקה ביסודי, ביחידות הלימוד בבגרות במתמטיקה וביחסן כלפי המקצוע.

הגעה למקצוע: בשתי הקבוצות יש מורות רבות ללא הכשרה רלוונטית. דרכי ההגעה שלהן לעיסוקן הנוכחי מגוונות. א' (קבוצה B) מספר: "אחרי הרבה שנים במחשבים התחלתי להשתעמם. גם לא הרגשתי שאני מצליח להתקדם בעבודה שלי. התחלתי לעבוד במקביל כמדריך לגו רובוטיקס. משם התגלגלתי ללמד מדעים בבית ספר קטן במשרה חלקית, ואחר כך נתנו לי עוד שעות כמורה למתמטיקה". ב' (קבוצה A) מספר גם הוא סיפור של "התגלגלות" למקצוע: "רציתי להיכנס להוראה, וחבר אמר לי שיש משרה במכינה באוניברסיטה

העברית. כיוון שמתמטיקה אני יודע היטב, זה נראה לי קל ללמד ל-3 יחידות. בעיקר נהניתי ללמד. אני לא מתמטיקאי דגול, אבל אני נהנה ללמד. משם התגלגלתי ללמד בתיכון. אחר כך ניהלתי בית ספר יסודי, וכשבאתי לעבוד בבית הספר הנוכחי שלי שיבצו אותי כמורה ליסודי".

הכשרת המורות: רק לשלוש מתוך קבוצת המורות יש תעודת הוראה בהתמחות במתמטיקה ליסודי – שתיים מקבוצה A ואחת מקבוצה B. שאלתי את המרואיינות אם קיבלו הכשרה רלוונטית אחרת אחרי כניסתן לתפקיד. רק שתיים מקבוצה A ושתיים מקבוצה B השתתפו בהשתלמויות כלשהן של הוראת מתמטיקה, וההשתלמויות תוארו כתורמות מעט מאוד, אם בכלל. אף אחת מהנחקרות לא הזכירה עזרה מטעם מורות ותיקות או רכזות מקצוע, אבל שתיים (אחת מקבוצה A ואחת מקבוצה B) ציינו לחיוב את ההדרכה מטעם נציגות חברות ספרי הלימוד, שהגיעו לבתי הספר להדרכות אישיות תקופתיות.

יחידות בבגרות: הפער בין קבוצות המורות ניכר כבר בשלב לימודיהן לבגרות. בקבוצה A נבחנו שתיים מהמורות ב-5 יחידות לימוד במתמטיקה ושתיים מהמורות ב-4 יחידות. בקבוצה B רק מורה אחת נבחנה ב-4 יחידות לימוד, שלוש נבחנו ב-3 יחידות, ומורה אחת, בת 56, עשתה בגרות הומנית, שכללה רמה נמוכה של מתמטיקה.

יחס כלפי מתמטיקה: שתי הקבוצות שונות מאוד זו מזו ביחס שלהן למתמטיקה ובחוויות שעיצבו יחס זה.

בקבוצה A הנבדקות מדווחות על חיבה למקצוע מגיל צעיר, על חוויות הצלחה ועל עניין. המורות מבטאות ביטחון עצמי בנושא: "אני חזקה במתמטיקה. אני ממש אוהבת את זה, תמיד אהבתי מתמטיקה" (ד'). "בחטיבה לקחתי קורסים של שוחרי מתמטיקה, משהו למצטיינים אחרי צהריים. מאז גיליתי כמה יופי יש במתמטיקה וכמה היא יכולה להיות מעניינת" (ט'). "בבית הספר לא אהבתי מתמטיקה, היה לי קל מאוד, אבל לא הייתי 'פריק' של זה. אבל תמיד היה לי קל. ביסודי לא שנאתי מתמטיקה, שנאתי תנ"ך. אבל תמיד ידעתי שאני טוב בזה, זה מין מקום בטוח" (ב'). "בסך הכול, היה לי ביטחון במקצוע. לא קל מדי ולא קשה מדי" (ג').

בקבוצה B הנבדקות מדווחות על חשש מהמקצוע, על כישלון בגיל צעיר ועל רצון לתיקון. "הייתי תלמיד אפור ובינוני. כשעברנו לארצות הברית לשנתיים הייתי תלמיד מעט יותר טוב כי רמת המתמטיקה שם הייתה נמוכה יותר. כשחזרנו נכנסתי לתיכון עירוני, וזה היה הסיוט הכי גדול שלי. אחרי שנתיים עברתי בית

ספר וסיימתי בלי בגרות. התאמצתי כדי אחר כך להשלים בגרות באקסטרני, היה לי קשה למרות שזה היה בשלוש יחידות" (א'). "אף פעם לא אהבתי את המקצוע הזה. בעיקר שנאתי שברים, ואחר כך כשהגענו לפונקציות הלכתי לאיבוד לגמרי" (ז'). "שנאתי מתמטיקה, אני חושבת שבעיקר כי היו לי מורים גרועים והרגשתי שאני טיפשה. כשהתחלתי ללמוד להיות מורה למתמטיקה הבנתי שאני יכולה לנסות לתקן, להיות מורה יותר טובה ולא להשניא את המקצוע על אחרים" (ח').

שאלת המחקר השנייה הייתה אם מורים/ות ומתכשרים/ות להוראה בבית הספר היסודי משתמשים בנימוקים של תובנה מתמטית. תוצאות המחקר הראו שככלל, הסטודנטיות והמורות מקבוצה B לא הראו תובנה מתמטית והשתמשו בנימוקים של תובנה מתמטית רק לעתים רחוקות, ואילו המורות בקבוצה A ביטאו תובנה מתמטית עקבית, וכן השתמשו בנימוקים מתחום התובנה המתמטית, במקום להישען על אלגוריתמים חישוביים. לא נמצא קשר בין ההיכרות של הנבדקות עם המושג "תובנה מתמטית" או "חוש מספרי" לבין היכולות שלהן. להלן אדגים את ההבדלים בין קבוצת הסטודנטיות ושתי קבוצות המורות, דרך בחינה של ארבעה פריטים.

פריט 3:

בלי לחשב במדויק, הקיפו את התשובה הנכונה ביותר, לפי האומדן שלכם. כמה הם: $6\frac{2}{5} \times \frac{15}{16}$?

i. יותר מ- $6\frac{2}{5}$

ii. פחות מ- $6\frac{2}{5}$

iii. בדיוק $6\frac{2}{5}$

iv. אי אפשר לדעת בלי לחשב

על פריט זה הצליחו לענות נכונה חצי מקבוצת הסטודנטיות, כל המורות מקבוצה A, ואף לא מורה אחת מקבוצה B. מתוך חמש המורות בקבוצה B, אחת לא ענתה והשאר בחרו בתשובה ii. בקרב הסטודנטיות, 4 בחרו ב-ii, אחת ב-iv, ואחת לא ענתה.

בפריט המקביל במבדק החישוב התבקשו הנבדקים לחשב את התרגיל באופן מדויק. סוגי הטעויות במבדק החישוב התחלקו לטעויות חישוב פשוטות (בקרב שתי מורות מקבוצה A), טעות באלגוריתם של החילוק ככפל בהופכי (שתי מורות מקבוצה B) או שילוב של שני סוגי הטעויות (מורה מקבוצה B, שטעה בשני סוגי הטעויות ובסוף נטש את השאלה ועבר הלאה).

בריאיון לאחר פתרון השאלונים נשאלו הנבדקות מדוע בחרו בתשובה זו. קבוצה A התאפיינה בתשובות המשתמשות בתובנה מספרית או משלבות ידע פרוצדורלי עם תובנה מספרית: "15/16 זה כמעט אחד, אבל זה פחות מאחד. אם אני מחלקת למשהו שקטן מאחד, אני מגדילה את מה שיש לי". "חילוק זה כפל בהופכי, אז בתרגיל הזה אני הופך וכופל ב-16/15. זה קצת יותר מאחד, ולכן זה יגדיל את המכפלה, אבל רק במעט".

מנגד, קבוצה B התאפיינה בחוסר יכולת להסביר את הבחירה או בהסתמכות על הכלל המוטעה, שחילוק מקטין: "אני לא יכולה להסביר את זה, אני פשוט יודעת שזה ככה". "אני מחלק, אז זה מקטין את מה שיש לי, כמו כשאני מחלק פיצה לכמה ילדים ונשאר לי פחות".

פריט 17:
בלי לחשב תשובה מדויקת, הקיפו את התשובה הקרובה ביותר לתרגיל: $9135 \div 61$

i. 100
ii. 150
iii. 300
iv. 30
v. 15

על פריט זה במבדק התובנה המספרית ענו נכון 58.33% מהסטודנטיות, 100% ממורות קבוצה A ו-80% ממורות קבוצה B. הטעויות בקרב המורות היו iii (פעם אחת), v (פעם אחת), ומורה אחת לא סימנה אף תשובה ועברה לשאלה הבאה. בקרב הסטודנטיות, תשובה iii נבחרה פעמיים, iv פעם אחת ו-v פעמיים. בפריט המקביל במבדק החישוב בכתב הצליחו שלוש מתוך ארבע מורות קבוצה A ושתיים מתוך חמש מורות בקבוצה B. שתיים מהמורות הגיעו לתשובה שגויה אך קרובה (152, 160) – אחת מקבוצה A ואחת מקבוצה B, ושלוש מורות הגיעו לשגיאה בסדר גודל וכתבו 15 – שתיים מקבוצה B והמורה שלא שויכה לקבוצות.

בתשובה לשאלה "איך הגעת לתוצאה הזו?" הסתמכו מורות מקבוצה B על חילוק ארוך שניסו לעשות בראש, במידות שונות של הצלחה. מורה אחת מקבוצה A הסבירה: "אני כאילו מצמצמת, ו-60 נכנס ב-90 פעם וחצי, ואז אני מוסיפה שני אפסים שהורדתי קודם, זאת אומרת את ה-35". מורה אחר אמר: "60 נכנס ב-600 10 פעמים, ולכן ב-6,000 – 100 פעמים. ואז יש לי עוד 3,000, שזה חצי מזה, ולכן יש לי פה עוד חצי מ-100, שזה 50 וביחד 150" – זאת אומרת, שימוש

בתרגילים מוכרים (benchmarks) ככלי עזר לפתרון התרגיל הנתון. מורה אחרת מקבוצה A הסבירה בדרך של אומדן ואלימינציה: "זה יהיה יותר מ-100, כי 100 כפול 60 זה 6,000, אבל בטוח לא פי 3 מזה, ולכן התשובה היחידה שהגיונית היא 150 – ii".

חלק משאלות שאלון התובנה המתמטית כללו בקשה לנימוק. היכולת לנמק את הפעולות קשורה להבנה המושגית והמילולית של התהליכים שנעשים בחישוב בעל פה, והיא חיונית ליכולת של מורה להסביר לתלמידים דרכי פתרון שונות. אפשר לצפות ממורות למתמטיקה להיות מסוגלות לנמק את דרכי הפתרון שלהן בדרך המסתמכת על ידע ועל הבנת מהות המספרים והפעולות, אך נראה שאין זה המצב.

פריט 13:
העריכו איזה מהתרגילים ייתן תוצאה קרובה ביותר לתוצאת התרגיל 86 X 38?
הקיפו את התשובה והסבירו למה.

i. 90 X 40
ii. 86 X 40
iii. 90 X 38
למה?____________

על פריט זה ענו נכונה שליש מקבוצת הסטודנטיות, שלוש מורות מקבוצה A, מורה אחת מקבוצה B ואחת לא משויכת – סך הכול חצי מהמורות. 70% מקבוצת המורות הצליחו לחשב זאת במבדק החישוב בכתב – כל קבוצה A ועוד שלוש מקבוצה B.

שלוש סטודנטיות ומורה אחד מקבוצה A לא נימקו. כשהמורה, שבחר בתשובה הנכונה, נשאל למה לא נימק, אמר: "אני שונא לנמק. זה מנג'ס. אני לא ממש יודע איך להסביר את זה בכל מקרה". סטודנטית אחת כתבה: "ברגע שצריך להסביר, מתחילים לבדוק, וזה לוקח יותר מדקה..." אותה סטודנטית כתבה "התשובה האינטואיטיבית שלי הייתה ii, אבל תוך כדי הסבר עברתי לתשובה iii. עדיין לא חישבתי במדויק. השאלה היא, מהו ההפרש הקטן יותר?" יש פה התחלה של תובנה מתמטית בחיפוש ההפרש בתרגיל כפל – שימוש בסוג אחד של תרגילים כדי לעזור בסוג אחר ופיתוח אסטרטגיות גמישות, אך עדיין יש הסתמכות רבה על הצד החישובי. רוב הנימוקים בקבוצת הסטודנטיות וכל הנימוקים של קבוצה B היו בעלי אופי חישובי, וחלקם העידו על חוסר הבנה בסיסי של כפל: סטודנטית אחת סימנה את ii וגם את iii, וכתבה בנימוק: "כי 4×38=86×2". אחרת בחרה בתשובה i ונימקה: "כי הוספנו בשני הגורמים, כך התוצאה תהיה קרובה יותר

לתרגיל". סטודנטית נוספת סימנה את תשובה iii ובנימוק חישבה את החישוב הבא: 248 -> 48=6×8, 240=80×30, 0=0×8, 270=90×30 – פירוק אשר אינו הגיוני לתרגיל כלל. חלק מהנימוקים של הסטודנטיות ושל המורות משתי הקבוצות כללו כיוון נכון עם טעות חישובית: "הוספת פעמיים של 86 היא הנמוכה ביותר, כי תרגיל ii גדול רק בפעמיים 86". רק שלוש מורות מקבוצה A ושתי סטודנטיות נתנו נימוק שמבוסס על תובנה מתמטית ואין בו טעות חישובית, כגון: "נוספו עוד 4 פעמים 38, זה הכי קרוב לתרגיל המקורי".

פריט 32:

בדוכן פלאפל א', מנה עולה 8.5 ש"ח, אבל יש הנחה של 5% לסטודנטים וסטודנטיות. בדוכן פלאפל ב' מנה עולה 8 ש"ח, אבל אין הנחות.
איפה המנה הזולה יותר לסטודנטים/ות?

i. דוכן א'
ii. דוכן ב'
הסבירות: ______

על פריט זה ענו נכונה 41.67% מהסטודנטיות, 75% ממורות קבוצה A ו-60% ממורות קבוצה B. לכאורה מדובר בשאלת אחוזים, אבל לרוב לא פתרו אותה בדרך של אחוזים, אלא שילבו המרה לשבר עשרוני ואומדן.

רוב הנימוקים של הסטודנטיות ושל מורות קבוצה B נעזרו בחישוב מדויק: "5% מ-8.5 הם 0.425 ש"ח, לכן בדוכן הפלאפל השני יש מחיר יותר זול של 8 ש"ח", "5% מ-8.5 זה 42.5 אג', כך שהעלות היא גדולה מ-8 ש"ח". חלק לא נימקו, או כתבו משהו שאינו נימוק: "ההנחה לא 0.5".

סטודנטית אחת ומורה מקבוצה A השתמשו בתרגילים פשוטים כבסיס לחישוב שלהם (benchmark): "10% מ-8.5 זה 0.85, 5% זה 0.4..." – ברגע שספרת העשיריות קטנה מ-5, הנבדקת הפסיקה את התרגיל – היו לה כל הנתונים לקבלת החלטה. באופן דומה כתב נבדק אחר מקבוצה A: "10% מ-8.5 זה 85 אגורות, ולכן 5% זה פחות מחצי שקל, לכן עדיף דוכן ב'".

לסיכום, מורות קבוצה A ביטאו יכולות המקושרות לתובנה מתמטית, וכן נטו להשתמש בנימוקים של תובנה מתמטית. מורות קבוצה B והרוב המכריע של פרחי ההוראה לא הצליחו בשאלות שחייבו תובנה מתמטית, ונטו לא להשתמש בנימוקים של תובנה מתמטית.

***שאלת המחקר השלישית* התייחסה לתרומה של הכשרת המורים לפיתוח התובנה המתמטית שלהם מזווית הראייה האישית שלהם.**

המורות במחקר זה נשאלו על היכרותן עם תכנית הלימודים ועל היכרותן עם המושג "חוש מספרי" או "תובנה מתמטית". רוב המורות הכירו את תכנית הלימודים – חלקן ישירות וחלקן דרך ספרי הלימוד ומבחני המיצ"ב והמפמ"ר. המורות הכירו את המושג, אך התקשו להגדיר אותו. היו שהצליחו להגדיר אותו דרך דוגמאות. לא נמצא קשר בין הכרת המושג לבין יכולות הקשורות לתובנה מתמטית. לאחר שלב הבירור הראשוני קיבלו המרואיינות פירוט על המושג תובנה מספרית ונשאלו אם ההכשרה שלהן כמורות למתמטיקה, בתארים, בהשתלמויות ובהתמקצעויות לאורך השנים, תרמה לפיתוח התובנה המתמטית שלהן.

בקבוצה A לא דווח על תרומה משמעותית של ההכשרה לתובנה המתמטית של המורות. לתחושתן, הן הגיעו לתפקיד כי כבר היו טובות במתמטיקה, וההכשרה נתנה להן בעיקר כלים להתמודד עם הבעיות של התלמידים: "התואר הזה ממש לא נתן לי הבנה מתמטית. בקורסים ראיתי את החברות נאבקות, ולי זה היה קל. יש לי רושם שלמי שהיה קל נשאר קל, ולמי שהיה קשה זה לא עזר" (ד'). מכל המורות ההכשרה תרמה הכי הרבה ל-ט', שדיווחה שההכשרה עזרה לה להבין מה היא עושה בדרך לפתרון בעיה ולנסח זאת במילים, אם כי לא פיתחה את התובנה המתמטית שלה: "תמיד הייתי עושה כל מיני דרכים עוקפות. נניח, היה לי קשה לזכור את 6×8, ותמיד אני עושה 2×4×6. אני מחשבת את זה מאוד מהר בראש, אז לא שמים לב. בתואר היה לי קורס אחד שבו הבנתי שזה לגיטימי ושכדאי לעודד את התלמידים לחשוף שיטות אישיות כאלו ולדבר עליהן. גם אני זוכרת שדיברנו על עצירה במספרים עגולים, השוואה לחצי, השיטה הרוסית וכו' – אולי למישהו זה חידש ועזר, לי זה בעיקר נתן מסגרת מושגית לדברים שכבר עשיתי – אבל מסגרת מושגית כזו היא טובה לי מאוד היום כמורה. הדבר השני שהיה טוב בתואר זה שנחשפתי לאמצעי המחשה. עד כמה שזכור לי, כל השאר היה לא רלוונטי".

בקבוצה B דיווחו הנבדקות שההכשרה ושנות ההוראה תרמו לתובנה המתמטית שלהן: "בטח, היום אחרי התואר הרבה יותר קל לי לעשות תרגילים שפעם היה לי קשה. אני מרגישה שאני יותר מבינה מה המשמעות של המספרים, מה עומד מאחורי הפעולות. נניח, למה מותר להחליף את הסדר בכפל – אני יכולה לצייר את זה במלבן ולהסביר לתלמיד" (ח'). "אני זוכרת שההשתלמות ממש עזרה לי. דיברנו על טעויות נפוצות של תלמידים וקלטתי שאלו גם טעויות שלי. נניח, עבדנו על זה שכפל לא תמיד מגדיל וחילוק לא תמיד מקטין. צריך לעצור ולחשוב כי בשברים זה הפוך ממה שקופץ לראש" (י'). "לא היו לי

השתלמויות ולא הייתה לי הרבה עזרה, אבל אני מרגישה שאני משתפרת ככל שאני עוברת על הספרים שוב ושוב וצריכה להסביר את זה עוד פעם – אז אני מבינה יותר בעצמי" (ו').

דיון ומסקנות

מחקר זה ניסה לבדוק את התובנה המתמטית של סטודנטיות להוראת מתמטיקה ושל מורות למתמטיקה בבית הספר היסודי. בשאלון תובנה מתמטית נמצא שחלק גדול מהסטודנטיות ומהמורות לא משתמשות בתובנה מתמטית בבואן להתמודד עם תרגילים חשבוניים. ב-14 פריטים מתוך 38 נכשלו לפחות חצי מהסטודנטיות. מצב המורות טוב יותר ממצב פרחי ההוראה, עם פער עקבי של בין 8 ל-20 נקודות, אך גם בקרב המורות יש קבוצה בעלת הישגים נמוכים מאוד. תוצאה של כ-60% בשאלון התובנה המתמטית מעמידה בספק את היכולת של פרחי ההוראה לפתח את התובנה המתמטית אצל הדור הבא של התלמידים, כמתבקש לפי תכנית הלימודים (משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006). המורות והסטודנטיות ביטאו תובנה מתמטית ברמה גבוהה יותר משל עמיתיהן הנמיבים (Courtney-Clarke and Wessels, 2014), אך שלא כעמיתיהן הטייוואנים (Yang et al., 2007), אין להן היכולת לפצות על רמת התובנה המתמטית באמצעות שליטה באלגוריתמים חישוביים. למעשה, תוצאות מבדק החישוב בכתב היו מעט נמוכות יותר ממבדק התובנה – תוצאה שהולמת את ממצאי המחקר ההשוואתי בין תלמידים בישראל לתלמידים בקוריאה (Markovits and Pang, 2006). בניגוד לציפיותיי, לא נמצאו הבדלים ניכרים בין הרמות בפריטים של המספרים השלמים, השברים והמספרים העשרוניים אצל המורות, אך בקרב הסטודנטיות אפשר לזהות קושי מסוים בשברים. לעומת זאת, נראה שככל שרמת המורכבות של השאלות עולה וככל שנדרשים רכיבים מתקדמים יותר של התובנה המתמטית, כך יורדת רמת ההצלחה בכל קבוצות המחקר. המורות והסטודנטיות התקשו לנמק את הפתרונות שבחרו, וכאשר הצליחו לנמק, חלק מהנימוקים היו מוטעים, חלק היו נימוקים חישוביים ורק מיעוטם היו נימוקים נכונים שכללו שיקולים של תובנה מתמטית.

פרופיל המורים והמורות במחקר זה מגוון. רוב המורות חסרות הכשרה פורמלית ומסודרת בהוראת המתמטיקה, ממצאים שמתיישבים עם פרופיל המורים למתמטיקה בבתי הספר היסודיים בארץ (וורגן, 2008). על פי ממצאי המחקר, המורות התחלקו לשתי קבוצות – קבוצה בעלת הישגים גבוהים וקבוצה

בעלת הישגים נמוכים. מורות מהקבוצה בעלת ההישגים הגבוהים מתאפיינות ביחס חיובי למקצוע המתמטיקה ומעידות על עצמן שהיו טובות במתמטיקה מגיל צעיר. המורות מהקבוצה בעלת ההישגים הנמוכים מעידות שההכשרה עזרה לפיתוח התובנה המתמטית שלהן, אולם תוצאות שאלון התובנה המתמטית ומבדק החישוב בכתב מעידות על חוסר ידע בסיסי בתחומי החשבון הנלמדים בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי ועל רמה נמוכה מאוד בכל מדדי התובנה המתמטית. מכאן אפשר להסיק שמורות בעלות תובנה מתמטית הגיעו לכך בלי קשר להכשרתן להוראה, ושההכשרה של מורים ומורות למתמטיקה בכיתות היסוד לוקה בחסר ולא מצליחה להוציא תחת ידיה בוגרים ובוגרות בעלי תובנה מתמטית, אף שאותן סטודנטיות, המתכשרות להוראה, תידרשנה להקנות תובנה מתמטית לתלמידיהן. יש לציין שקבוצת המחקר נלקחה ממכללה ומבתי ספר במרכז הארץ, חלקם בתי ספר פרטיים. אפשר לשער שהמצב הכללי הוא אולי חמור יותר.

מחקר זה נעשה על מדגם קטן והשתמש בשיטות של מחקר איכותני כדי לקבל תמונת מצב ראשונית ומצומצמת על התובנה המתמטית של מורים ופרחי הוראה בישראל. התוצאות מדאיגות וקוראות לפעולה. בימים אלו, שבהם משרד החינוך שם דגש על לימודי המתמטיקה ברמות הגבוהות ומנסה להעלות את שיעור הניגשים לבחינות הבגרות ברמת 5 יחידות לימוד, יש מקום לחזק דווקא את הבסיס בכיתות היסוד של בית הספר היסודי, כדי להצמיח תלמידים בעלי תפיסה מתמטית טובה, שלמה ומגובשת יותר, ולא רק תלמידים שיודעים לפתור בעיות בדגם מוכר. כדי לחזק את הבסיס יש לחזק את המורים והמורות. במחקר שערכה גוברמן (2007) בארבע מכללות לחינוך היא מצאה שההכשרה שמה דגש מועט מאוד על אריתמטיקה וידע מתמטי בסיסי. המרצות של הקורסים שכללו אריתמטיקה תיארו את פרחי ההוראה שבכיתותיהן חסרי תובנה מתמטית, וממצא זה מתיישב עם ממצאי המחקר הנוכחי: "חסרים להם דברים בסיסיים, כמו הכרת המספרים"; "הם לא מכירים לוגיקה מתמטית פנימית, אסטרטגיות שיטתיות"; "אין להם שום תחושה של מספר" (שם, 93-94). כשגוברמן בדקה את הסילבוסים של הקורסים היא מצאה שנושאים מרכזיים הקשורים לרכיבי התובנה המתמטית נעדרים לחלוטין מתכנית הלימודים של פרחי ההוראה. כשבדקה את השפעת הקורסים האלה על רמות החשיבה האלגברית של הסטודנטים/ות היא מצאה שהשפעתם הייתה חיובית בדרך כלל, אך מאוד מצומצמת. לפני הקורסים היו 63% מהסטודנטים/ות ברמות החשיבה הנמוכות (רמות 0-2) – רמות שאינן

מקושרות עם תובנה מתמטית. אחרי הקורסים נשארו **59%** מהסטודנטים/ות במחקר ברמות החשיבה הנמוכות. מכאן שהתכנית במכללות לא יעילה לפיתוח רמות החשיבה, ולפי תוצאות המחקר הנוכחי, היא גם אינה יעילה לפיתוח תובנה מתמטית. מחקרים קודמים הראו כי אפשר לפתח תובנה מתמטית בתכנית התערבות ממוקדת ומכוונת למטרה זו (Markovits and Sowder, 1994). מתוצאות המחקר הנוכחי ופרופיל המורים בארץ, נראה שמוטב להתחיל תכנית התערבות כזו במוסדות הכשרת המורים ובהשתלמויות. לחלופין, אפשר לסנן מועמדים להוראת מתמטיקה במבדק ייעודי ממוקד, בדומה לסינון הנעשה למורי האנגלית, ולא להסתמך על הקורסים שמועברים כיום.

זהו מחקר קטן וראשוני, אך הוא מסמן כיוונים חשובים למחקר המשך. כדי לבחון את האפקטיביות של הכשרת המורים כדאי לבדוק את התובנה המתמטית על מדגם גדול יותר של פרחי הוראה ולבדוק את הקשר בין התובנה המתמטית ליכולת חישוב בכתב, באופן שהמדגם המצומצם של המחקר הנוכחי לא אפשר. עוד חשוב לערוך מבחן לפני הקורסים באריתמטיקה במוסדות להכשרת מורים ואחריהם. אם יהיה הדבר אפשרי, יהיה מעניין ליזום תכנית התערבות לקבוצת פיילוט אשר תתמקד בפיתוח התובנה המתמטית, ולהשוות את תוצאות המבדקים אחרי תכנית ההתערבות לתוצאות אחרי קורס בסיסי אחר הנהוג היום במכללות. כיוון מעניין נוסף הוא לבדוק לעומק את הקשר בין תובנה מתמטית לבין רמות חשיבה אריתמטיות על ידי השוואה בין שני מבדקים אלו על קבוצה אחת של נבדקים. כדי להעריך את חשיבות התובנה המתמטית לאיכות ההוראה כדאי לערוך מחקר המשווה בין דרכי ההוראה של מורים ומורות למתמטיקה בעלי תובנה מתמטית מפותחת לבין כאלו שהדגימו תובנה מתמטית דלה, וכן להשוות בין הישגי התלמידים והתלמידות שלהם.

מקורות

גוברמן, ר', **2007**. "הקשר בין רמת ההתפתחות של החשיבה האריתמטית של פרחי הוראה לבין המצופה מהם בלמידה משמעותית", עבודת דוקטור, התכנית ללימודים בינתחומיים, הפקולטה למדעי הרוח והחברה, אוניברסיטת בן־גוריון בנגב.

____, **2014**. "התפתחות החשיבה האריתמטית: פרדיגמה חלופית להערכת הידע של תחום התוכן בקרב פרחי הוראה המתמחים בהוראת המתמטיקה", בתוך: ד'

פטקין וא' גזית (עורכים), **המורה למתמטיקה**, תל אביב: מכון מופ"ת.

וורגן, י', 2008. **הוראת המתמטיקה במערכת החינוך: תמונת המצב לגבי המורים**, ירושלים: הכנסת, מרכז המחקר והמידע.

משרד החינוך, 2010. **מסקנות פדגוגיות ממבחן מיצ"ב במתמטיקה לכיתה ה'**, תשס"ט (מקוון).

משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006. **תכנית לימודים במתמטיקה לביה"ס היסודי**, האגף לתכניות לימודים.

משרד מבקר המדינה, 2014. "הוראת המתמטיקה", בתוך: **מבקר המדינה: דוח שנתי 64ג לשנת 2013 ולחשבונות שנת הכספים 2012**, פרק שני – משרדי הממשלה.

פישביין, א', 2004. "קשרי הגומלין בין המרכיבים הפורמאליים, האלגוריתמיים והאינטואיטיביים של פעילות מתמטית", **על"ה** 32, עמ' 5-13.

שקדי, א', 2003. **מילים המנסות לגעת: מחקר איכותני – תיאוריה ויישום**, תל אביב: רמות.

Ball, D. L., Hill, H. C and Bass, H., 2005. "Knowing Mathematics for Teaching: Who Knows Mathematics Well Enough to Teach Third Grade, and How Can We Decide?" *American Educator* 29 (1): 14–17, 20–22, 43–46.

Burger, W. F. and Shaughnessy, J. M., 1986. "Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry," *Journal for Research in Mathematics Education* 17 (1): 31–48.

Courtney-Clarke, M. and Wessels, H., 2014. "Number Sense of Final Year Pre-Service Primary School Teachers," [Electronic version] *Pythagoras* 35 (1): Art. #244.

Faulkner, V. N., 2009. "Components of Number Sense an Instructional Model for Teachers," *Teaching Exceptional Children* 41 (5): 24–30.

Gray, E. M. and Tall, D. O., 1994. "Duality, Ambiguity, and Flexibility: A 'Proceptual' View of Simple Arithmetic," *Journal for Research in Mathematics Education* 25 (2): 116–140.

Greeno, J. G., 1991. "Number Sense as Situated Knowing in a Conceptual Domain," *Journal for Research in Mathematics Education* 22 (3): 170–218.

Hill, H. C., Rowan, B. and Ball, D. L., 2005. "Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement," *American Educational Research Journal* 42 (2): 371–406.

Kalchman, M., Moss, J. and Case, R., 2001. "Psychological Models for the Mathematical Understanding: Rational Numbers and Functions," in: S.

M. Carvers and D. Klahr (eds.), *Cognition and Instruction: Twenty-Five Years of Progress*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 1–39.

Leung, Y. H., 梁潤興. (2007). *The relationship between numerical estimation and number sense in students' learning of mathematics* (Doctoral dissertation, The University of Hong Kong (Pokfulam, Hong Kong).

Markovits, Z., Hershkowitz, R. and Bruckheimer, M., 1989. "Research in Practice: Number Sense and Nonsense," *Arithmetic Teacher* 36 (6): 53–55.

Markovits, Z. and Sowder, J., 1994. "Developing Number Sense: An Intervention Study in Grade 7," *Journal for Research in Mathematics Education* 25 (1): 4–29.

Markovits, Z. and Pang, J., 2006. "Number Sense: Comparative Study with Students from Israel and Korea and Implications for Teaching," in: N. Popov, C. Wolhulter, C. Heller and M. Kysilka (eds.), *Proceedings of the 4th Conference on Comparative Education and Teacher Training*, Vol. 4, Sofia, Bulgaria, pp. 214–220.

——, 2007. "The Ability of Sixth Grade Students in Korea and Israel to Cope with Number Sense Tasks," in: *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 241–248.

NCTM, 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA.

Reys, R. and Yang, D. C., 1998. "Relationship between Computational Performance and Number Sense among Sixth and Eighth-Grade Students in Taiwan," *Journal for Research in Mathematics Education* 29 (2): 225–237.

Tsao, Y. L. and Lin, Y. C., 2012. "Elementary School Teachers' Understanding towards the Related Knowledge of Number Sense," *US-China Education Review*, B (1): 17–30.

Yang, D. C., 2005. "Number Sense Strategies Used by 6th Grade Students in Taiwan," *Educational Studies* 31 (3): 317–333.

Yang, D. C., Reys, R. E. and Reys, B. J., 2007. "Number Sense Strategies Used by Pre-Service Teachers in Taiwan," *International Journal of Science and Mathematics Education* 7 (2): 383–403.

tomsivanim@gmail.com