דורית פטקין, אביקם גזית

השפעת שינויי נוסח ואפיונים מתמטיים על היכולת לפתור בעיות אתגר בקרב מתכשרות להוראת מתמטיקה ובקרב מורות למתמטיקה

תקציר: המאמר מבקש להציג ממצאי מחקר, שבדק את ההשפעה של שינויי נוסח ואפיונים מתמטיים על היכולת לפתור בעיות אתגר בקרב מתכשרות להוראת מתמטיקה ובקרב מורות למתמטיקה. מהממצאים עולה כי כאשר מוצגת בעיה שיש בה שינוי בניסוח המילולי של אחד ממרכיביה, אבל שינוי זה אינו גורם לשינוי במאפיינים המתמטיים ובתהליך הפתרון, אין הבדל משמעותי באחוז התשובות הנכונות בשני הנוסחים של הבעיה. אולם כאשר מוצגת בעיה שנעשה בה שינוי בניסוח המילולי של אחד ממרכיביה, הגורם לשינוי במאפיינים המתמטיים ובתהליך הפתרון, יש פער גדול בין שני הנוסחים באחוז התשובות הנכונות. ממצאים אלה התקבלו גם אצל המתכשרות להוראת מתמטיקה וגם אצל המורות בפועל. בנוסף, נמצא כי המתכשרות להוראה הציגו בתהליך הפתרון חשיבה מקורית יותר מאשר המורות בפועל. לכן, מומלץ להתמקד במסגרת השתלמויות ובהכשרת מורים גם בבעיות אתגר עם ניסוחים מילוליים שונים כדי להגמיש את החשיבה המובילה לפתרונן.

מילות מפתח: פתרון בעיות אתגר, מתמטיקה, מורים, מתכשרות להוראה, שפה.

רקע תיאורטי

בעיות מילוליות הן עקב אכילס של הוראת מתמטיקה בכל רמות הלימוד. ברואר (Bruer, 1994) כותב כי בעיות מילוליות הן החור השחור בהוראת מתמטיקה. בפתרונן מושקעת הרבה אנרגיה, אבל מהאנרגיה הזאת לא יוצא אור. בספרו "כיצד פותרין" כותב פויה (Polya, 1957) שתגלית גדולה עשויה לפתור בעיה גדולה, אך בפתרונה של כל בעיה יש גרעין של תגלית.

חוקרים רבים בתחום מסכימים כי בעיה מעמידה בפני הפותר מטרה, כאשר בדרך יש מכשול שעליו צריך להתגבר (Hayes, 1989, Gilhooly, 1996, Polya,1981).

פויה (Polya, 1957) מציג ארבעה שלבי יסוד בדרך לפתרון יעיל וטוב של בעיה מתמטית: הבנת הבעיה, עריכת תוכנית לפתרון, ביצוע התוכנית, סקירה לאחור הכוללת בקרה.

בשלב הראשון של הבנת הבעיה יש להתמקד בשלושה דברים: מה מחפשים, מה הם הנתונים ומה הם התנאים. בשלב השני של עריכת התוכנית יש לבדוק האם הפותר פתר בעבר בעיה או בעיות דומות והאם הוא משתמש בכל המושגים הטמונים בתוכן הבעיה. בשלב השלישי של ביצוע התוכנית יש לדאוג להכנסת הנתונים לדרך הפתרון שלב אחרי שלב. בשלב הרביעי והאחרון, שהוא סקירה לאחור וביקורת (רפלקציה), יש לבדוק האם התוצאה שהתקבלה מתאימה

והאם ניתן להגיע לאותה תוצאה גם בדרך או בדרכים אחרות. הקפדה על ביצוע כל אחד מארבעת השלבים עשויה לתרום לפתרון בעיות במתמטיקה.

ישנם חוקרים המדגישים קשיים אפשריים בכל אחד מהשלבים לפתרון בעיות. ארזרלו (Arzarello, 1998) מצביע על קשיים בהבנת הנקרא ובקידוד המידע המילולי למונחים־סמלים מתמטיים. מרשל (Marshall, 1995) מתמקד בקשיים במציאת תוכנית/שיטה לפתרון, הנובעים מאי שליטה באסטרטגיות לפתרון בעיות, כתוצאה מהוראה לא מספקת ולא מתאימה.

קוב, ייקל ומקליין (Cobb, Yackel & McClain, 2000) דנים בביצוע לקוי של תוכנית הפתרון עקב כשלים וחסכים מתמטיים, וכן בחוסר מודעות לתהליכי בקרה ואי ידיעת הצורך לאמת את הפתרון. ג׳קובס ואמברוז (Jacobs & Ambrose, 2008-2009) מציינות "ארגז כלים" שממנו המורים יכולים לבחור אמצעים שיסייעו לתלמידיהם לפתור בעיות מילוליות ולחקור קשרים בין רעיונות מתמטיים. הן זיהו שמונה קטגוריות של מהלכי מורה, שבתזמון נכון יכולות להוביל לפתרון נכון של בעיות מילוליות.

בספרות המחקרית יש מספר גישות לתהליכי פתרון בעיות, שמהן ניתן לגזור הנחיות והדרכה ללומד מה לעשות כשמתמודדים עם אתגר חשיבה. גישת עיבוד המידע משתמשת בווריאציה הקרובה לארבעת שלבי הפתרון הנזכרים לעיל. הגישה מדגישה את הצורך להכיר את סביבת הבעיה, דהיינו, את כל המרכיבים היוצרים קשרי גומלין עם הבעיה (Johnson-Laird, 2000). לקראת פתרון הבעיה צריך להציג את רפרטואר המידע הקשור לבעיה, כדי להוציא ממנו את הנדרש לפתרון. השלב החשוב, ולעיתים הקריטי, בתהליך עריכת התוכנית לפתרון הבעיה הוא מציאת ייצוג פנימי של הבעיה. זהו השלב בו מתרגמים את נתוני הבעיה לצורה הממחישה את המצב וממנה נוח לצאת לפתרון (האוניברסיטה הפתוחה, 1990).

דוגמה טובה להמחשת חשיבות ייצוג הבעיה בעת תהליך הפתרון יכולות לשמש שתי הבעיות הבאות:

א. נגר מנסר ארבעה ניסורים זהים ב־12 דקות. בכמה זמן ינסר חמישה ניסורים זהים?

ב. נגר מנסר קורה ארוכה וצרה לארבעה חלקים שווים ב־12 דקות. בכמה זמן ינסר קורה זהה לחמישה חלקים שווים?

הבעיה הראשונה פשוטה וניתן למצוא בקלות בעיות אנלוגיות שמתמודדים איתן פעמים רבות בחיי היום־יום, כמו: מחיר 4 לחמניות הוא 12 ש"ח. מה מחיר 5 לחמניות?

הבעיה השנייה נראית, בקריאה ראשונה, דומה לבעיה הראשונה, אבל השוני בניסוח המילולי בין "ניסורים" בבעיה הראשונה לבין "חלקים" בבעיה השנייה הוא מהותי. בבעיות מסוג זה יש לחשוב על ייצוג מתאים של הבעיה, המראה את הקשר בין מספר הניסורים למספר החלקים: כאשר מנסרים קורה לארבעה חלקים, יש לבצע שלושה ניסורים בלבד. ייצוג הבעיה במקרה זה יכול להיעשות למשל על ידי ציור:

ניסור I   ניסור II   ניסור III

כדי לענות על הבעיה השנייה צריך להתייחס לזמן הנדרש לכל ניסור ולכן יש לחלק את הזמן במספר הניסורים, כלומר 12 דקות לחלק ל-3, משמע לכל ניסור יש להקדיש ארבע דקות. כדי ליצור חמישה חלקים, צריך לבצע ארבעה ניסורים והתשובה היא 4X4=16 דקות (ולא 15).

מרכיב זה של פתרון באמצעות אמצעי המחשה כמו ציור, יכול לסייע להבין את הבעיה ויש לעודד את שילובו בתהליכי הוראת מתמטיקה.

מרסט (Merseth,1993) מיטיבה לתאר זאת במאמר, שבתרגום חופשי נקרא: "בן כמה הרועה"? לטענתה, תלמידי כיתה ג' במערב התיכון של ארה"ב נותנים תשובה מספרית לבעיה שלפי נתוניה לא ניתן לענות עליה באמצעות פתרון מספרי. הבעיה שהוצגה בפניהם עסקה ברועה שיש לו בעדר 125 כבשים וחמישה כלבים, והשאלה היא: בן כמה הרועה? אין קשר בין מספר הכבשים והכלבים ובין גיל הרועה, ובכל זאת, כ-75% מהתלמידים ענו תשובה מספרית. להלן תשובה אופיינית שניתנה על ידי אחד התלמידים, כפי שמופיע בצילום דף המחברת במאמר (שם, 1993):

130 =125+5, התלמיד העביר קו על התרגיל וכתב שהרועה זקן מדי. אחר כך הוא כתב: 125-5=120, שוב מחק בקו את התרגיל וכתב שהרועה עדיין זקן. לבסוף כתב 125:5=25, וציין שזהו הפתרון — הרועה בן 25!

שתי הבעיות, זו עם הנגר וזו עם הרועה, הן מסוג הבעיות שמספר הנתונים בהן אינו מספיק, או שהנתונים המספריים לחישוב לא מופיעים בצורה ישירה וצריך להסיק מתוכן הבעיה. בהקשר זה כותב סיגלר (Sigler, 2006) כי יש לתת לתלמידים להתמודד יותר עם בעיות שבהן הם צריכים לעבור מאסטרטגיית פתרון אחת לאסטרטגית פתרון אחרת, תוך כדי תהליך חשיבה גמיש.

כדי להדריך תלמידים להתמודד בצורה מושכלת עם פתרון בעיות שונות, יש צורך במורים המיומנים בתהליכים כאלה ובעלי הכשרה מתאימה, המאפשרת להם להציג בפני תלמידיהם אמצעים להתמודד עם בעיות מילוליות, שיש בהן אתגר לחשיבה. על המורה לשלוט באותן מיומנויות המאפשרות פתרון נכון של אותן בעיות וליצור סביבה מתאימה להקניית המיומנויות האלה ללומד, כדברי המתמטיקאי פויה (Polya, 1957, pp. 1):

"אם הוא (המורה) ממלא את הזמן העומד לרשותו בתרגול תלמידיו בפעולות שיגרה, הריהו ממית את התעניינותם, מעכב את התפתחות מחשבתם ומחמיץ את אפשרויותיו. אך אם הוא מגרה את סקרנותם של תלמידיו בהציגו לפניהם בעיות בתחום הישג תפיסתם ומסייע להם 'לתפור' את בעיותיהם באמצעות שאלות מנחות, הוא עשוי לנטוע בהם טעם וחיבה למחשבה עצמאית ולפתח אגב כך כלים לכך".

מטרת המחקר היא כאמור, לבדוק את ההשפעה של שינוי נוסח מילולי ואפיונים מתמטיים על היכולת לפתור בעיות אתגר בקרב מתכשרות להוראת מתמטיקה ומורות למתמטיקה בפועל.

שאלות המחקר

1. האם שינוי בניסוח המילולי ובמאפיינים המתמטיים של בעיות אתגר ישפיע על ההצלחה בפתרונן בקרב מתכשרות להוראת מתמטיקה ומורות למתמטיקה בפועל?
2. האם שינוי בניסוח המילולי ובמאפיינים המתמטיים של בעיות אתגר יציג הבדל בשיעור ההצלחה בפתרונן בין המתכשרות להוראה לבין מורות בפועל?

מתודולוגיה

מחקר כמותי בו ענו נבדקות משתי אוכלוסיות על שש בעיות אתגר במתמטיקה.

אוכלוסיית המחקר: 25 מורות למתמטיקה בבית ספר יסודי, בעלות תואר ראשון, שלהן יותר משלוש שנות ותק, ו-26 סטודנטיות המתכשרות להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי.

כלי המחקר: שאלון שהכיל שש בעיות אתגר, אשר חולקו לשלושה זוגות של בעיות, כאשר כל שתיים היו דומות בסיפור הרקע אך שונות בניסוח המילולי ושתיים מהן היו שונות גם במאפיינים המתמטיים שלהן (בעיות 1 ו-3). באותן שתי בעיות השינוי בנוסח המילולי מנוסח א׳ לנוסח ב׳ משנה את התוכן המתמטי של הבעיה ולכן הפתרון הנכון שונה בכל אחד משני הנוסחים. בבעיה אחת (שאלה 2) השינוי בנוסח המילולי, מנוסח א׳ לנוסח ב׳, אינו משנה את המאפיינים המתמטיים של הבעיה ולכן הפתרון הנכון מוביל לתשובה זהה בשני הנוסחים.

את הבעיות בנוסח א׳ ניתן לפתור באופן ישיר ואילו בבעיות בנוסח ב׳ לא ניתן להשתמש ישירות בנתונים לפתרון ויש לבצע שלב מקדים של הכנה (על ידי ציור או תרגיל ביניים) כדי להתקדם בפתרון הבעיה.

נוסח א׳

1. נגר מנסר 4 ניסורים זהים ב-12 דקות. בכמה זמן ינסר 5 ניסורים זהים?
2. שלושה טרקטורים זהים חורשים יחד חלקת אדמה ב-3 שעות.
   בכמה זמן יחרוש טרקטור אחד שליש מאותה חלקת אדמה?
3. תולעת מטפסת מתחתית בור שעומקו 10 מ׳ ועולה מטר אחד ביום.
   כעבור כמה ימים תגיע התולעת לקצה הבור?

נוסח ב׳

1. נגר מנסר קורת עץ ארוכה וצרה לארבעה חלקים שווים ב-12 דקות.
   בכמה זמן הוא ינסר קורה זהה לחמישה חלקים שווים?
2. שלושה טרקטורים זהים חורשים יחד שלושה דונמים ב-3 שעות.
   בכמה זמן יחרוש טרקטור אחד דונם אחד?
3. תולעת מטפסת מתחתית בור שעומקו 10 מ׳. במשך היום עולה התולעת 3 מטרים ובלילה נרדמת ומחליקה 2 מ׳ למטה. כעבור כמה ימים תגיע התולעת לקצה הבור?

<u>בשאלת הנגר (1)</u>: שינוי הניסוח המילולי שהתבצע כאשר הוחלפה המילה ״ניסורים״ בנוסח א׳ ל״חלקים״ בנוסח ב׳, יצר בעיה חדשה שפתרונה אחר. הבעיה בנוסח א׳ מתייחסת למשך הזמן הנדרש לחמישה ניסורים, בעוד שבנוסח ב׳ השאלה היא על משך הזמן הנדרש לניסור של חמישה חלקים. בשני הנוסחים נתונים המספרים — 12, 4, 5, כאשר בשני הנוסחים נתון הזמן הכולל: 12 דקות. אולם בעוד שבנוסח א׳ המספר 4 מתייחס לניסורים, בנוסח ב׳ המספר 4 מתייחס לחלקים ולכן שתי השאלות אינן אנלוגיות מבחינת התוכן המילולי שמשנה את ההקשר המתמטי ועימו את החשיבה הנדרשת לפתרונן.

בנוסח א׳ עושים שימוש מיידי של חלוקת הזמן הכולל במספר הניסורים כדי לקבל את הזמן הנדרש לניסור אחד ומכאן מגיעים לתשובה שהזמן הנדרש ל-5 ניסורים הוא 15 דקות (12:4X5=15). בנוסח ב׳ יש לבצע תחילה ״תרגום״ מתמטי של מספר החלקים למספר הניסורים שבוצעו. אם הנתון הוא שנוסרו ארבעה חלקים, הרי שנעשו שלושה ניסורים ולכן הזמן הנדרש לניסור אחד הוא 4 דקות. כדי לקבל חמישה חלקים כפי שנדרש בבעיה, יש לבצע ארבעה ניסורים ולכן התשובה לבעיה בנוסח זה היא 16 דקות (4X4=16).

במילים אחרות, בעוד שבנוסח א׳ הניסורים מבוטאים בגלוי, הרי שבנוסח ב׳ צריך להסיק את מספר הניסורים שיש לבצע ממספר החלקים.

<u>בשאלת הטרקטורים (2)</u>: השינוי מנוסח א׳ הוא שינוי צורני של התוכן המילולי שאינו מביא לשינוי מהות הבעיה, אך אולי מקל או לחילופין מקשה על הפתרון, שהוא זהה בשני הנוסחים. בשני הנוסחים שלושה טרקטורים חורשים חלקת אדמה בשלוש שעות. בנוסח א׳ החלקה מבוטאת באורח מילולי לחלוטין: ״חלקת אדמה״, ובנוסח ב׳ החלקה מבוטאת ביחידות שטח: שלושה דונמים. הבדל צורני נוסף הוא בניסוח השאלה: בכמה זמן יחרוש טרקטור אחד שליש מהשטח (נוסח א׳) לעומת כמה זמן יחרוש טרקטור אחד דונם אחד (נוסח ב׳). נוסח א׳ מוריד לכאורה את העומס המספרי של מספר הדונמים בחלקה ומכוון לחלק מתאים של שליש השטח, ואילו בנוסח ב׳ יש נתון מספרי של השטח, שהוא שלושה דונמים ולכן דונם אחד הוא שליש מהחלקה כולה.

התשובה הנכונה זהה בשני הנוסחים: 3 שעות.

<u>בשאלת התולעת</u>: בנוסח א׳ הפתרון המתמטי הוא בדיוק כמו עומקו של הבור במטרים: עשרה מטרים ולכן 10 ימים. בנוסח ב׳ אי אפשר לעשות הקש מעומק הבור לזמן הנדרש, כי המתמטיקה שונה. התולעת תגיע לקצה הבור ביום השמיני מאחר שהיא מטפסת ביום שלושה מטרים ומחליקה שני מטרים, ולכן בסוף היום השביעי תהיה בגובה של 7 מטרים. הטיפוס ביום השמיני יביא אותה לקצה הבור.

התשובה בנוסח א׳ היא עשרה ימים ואילו התשובה בנוסח ב׳ היא שמונה ימים.

ממצאים

שאלת המחקר הראשונה התמקדה בהבדלים באחוזי ההצלחה בפתרון שני הנוסחים של כל אחת משלוש הבעיות. בלוח 1 מוצגת התפלגות התשובות הנכונות והתשובות השגויות בקרב כל המשתתפות, בכל אחת משלוש מהבעיות בשני הנוסחים א׳ ו-ב׳.

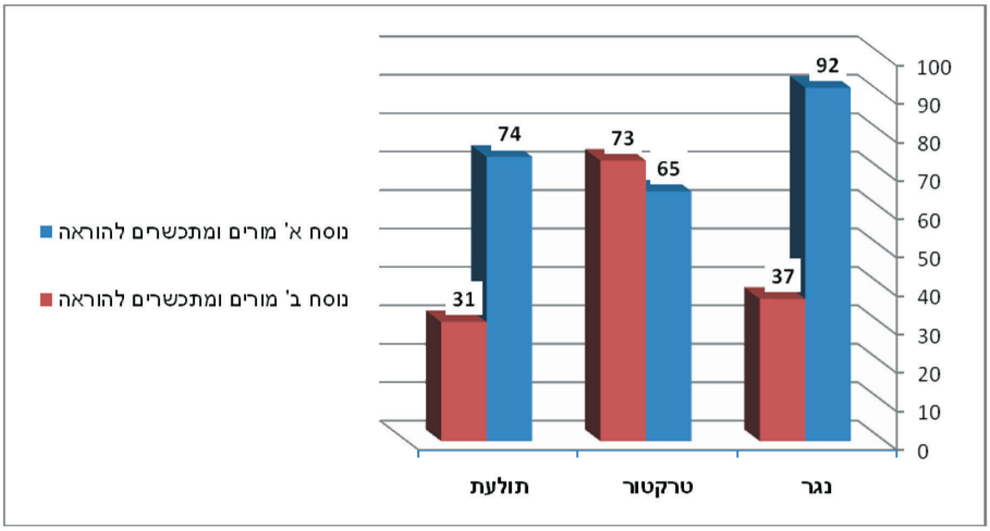
לוח 1: התפלגות התשובות בקרב כלל האוכלוסיה לשתי הבעיות בנוסח א׳ ובנוסח ב׳*

כלל האוכלוסיה N = 51 / הבעיה	נוסח א׳		נוסח ב׳	
	ענו נכון	שגו	ענו נכון	שגו
הנגר	47 (92%)	4 (8%)	19 (37%)	30 (59%)
הטרקטורים	33 (65%)	17 (33%)	36 (73%)	14 (25%)
התולעת	38 (74%)	13 (26%)	16 (31%)	33 (65%)

* לא כל הנחקרות השיבו על כל השאלות

על פי לוח 1 נמצא שבנוסח א׳ אחוז העונים תשובות נכונות היה בטווח של 65%-92% כאשר בבעיית הטרקטורים היה אחוז הצלחה הנמוך ביותר (65%) מבין שלוש הבעיות, ואילו בבעיית הנגר היה אחוז ההצלחה הגבוה ביותר (92%). לאחר שינוי הנוסח המילולי של הבעיה (נוסח ב׳) ירד טווח אחוז התשובות הנכונות ל-31%-73%. בנוסח ב׳ היה אחוז התשובות הנכונות הגבוה ביותר בבעיית הטרקטורים (73%). אחוז גבוה במקצת מאחוז התשובות הנכונות לאותה בעיה בנוסח א׳. בשתי הבעיות האחרות ירד אחוז התשובות הנכונות (בבעיית הנגר — ב-55% ובבעיית התולעת ב-43%).

תרשים 1: ההבדלים (באחוזים) של התפלגות התשובות הנכונות בנוסח א׳ ובנוסח ב׳ בכלל האוכלוסיה



לפתור בעיות אתגר בנוסחים שונים, כאשר ההבדל בנוסחים הוא ניסוח מילולי ומאפיינים מתמטיים.

בלוח 2 מוצגות התפלגות התשובות על כל אחת מהשאלות בקרב המורות והמתכשרות להוראה.

לוח 2: התפלגות התשובות בקרב המורות וסטודנטיות מתכשרות להוראה לשאלות בנוסח א' ובנוסח ב'*

הבעיה	נוסח א'				נוסח ב'			
	מורות ענו נכון	**N=25** שגו	**סטודנטיות** ענו נכון	**N=26** שגו	**מורות** ענו נכון	**N=25** שגו	**סטודנטיות** ענו נכון	**N=26** שגו
הנגר	24 (96%)	1 (4%)	23 (88%)	3 (12%)	8 (32%)	17 (68%)	11 (42%)	13 (52%)
הטרקטור	13 (52%)	12 (48%)	20 (77%)	5 (19%)	17 (68%)	8 (32%)	19 (73%)	6 (23%)
התולעת	17 (68%)	8 (32%)	21 (81%)	5 (19%)	9 (36%)	16 (64%)	7 (27%)	17 (65%)

* לא כל הסטודנטיות ענו על כל השאלות

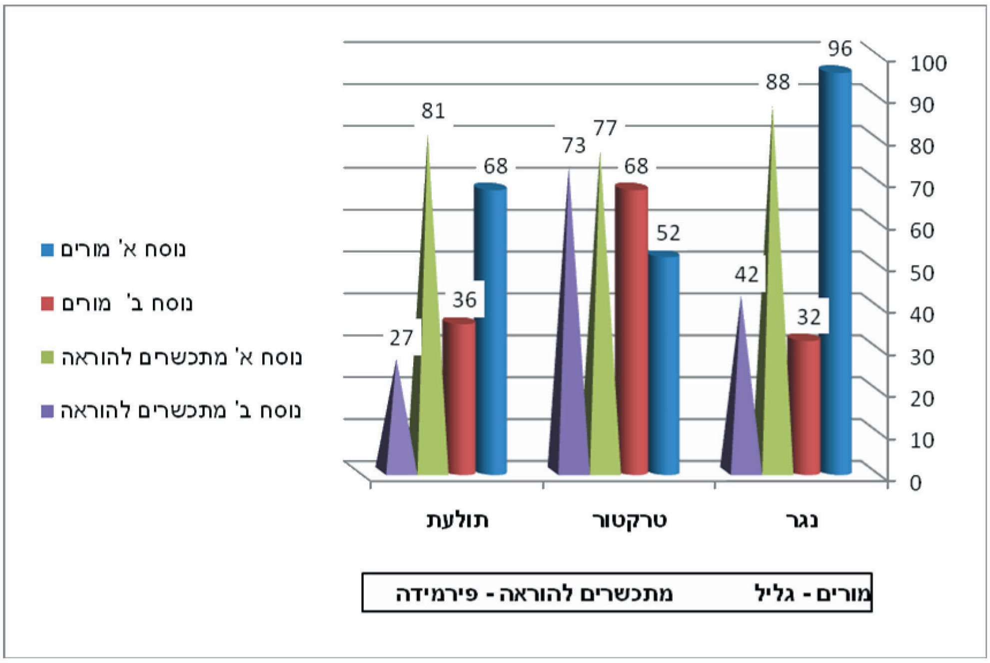
על בעיית הנגר בנוסח א' ענו נכון רק 96% מהמורות ו-88% מהסטודנטיות. אולם על נוסח ב' ענו נכון רק 32% מהמורות ו-42% מהסטודנטיות. הירידה באחוז ההצלחה מנוסח א' לנוסח ב' היא של 64% ו-46% בהתאמה. על נוסח א' ענו נכון יותר מורות (יתרון של 8%), ואילו על נוסח ב' ענו נכון יותר פרחי הוראה (יתרון של 10%).

על בעיית הטרקטור בנוסח א' ענו נכון 52% מהמורות ו-77% מהסטודנטיות להוראה. כאן אפשר לראות פער משמעותי של 25% לטובת הסטודנטיות. בנוסח ב' אין הבדל משמעותי בין המשיבות נכון בקרב המורות (68%) לבין הסטודנטיות להוראה (73%). שינוי הניסוח המילולי — צורת הגשת השאלה, שפתרונה זהה בשתי הגירסאות, שינה במעט את אחוז ההצלחה הכולל, אך לעומת זה יש שינוי בולט באחוז המשיבות נכון בקרב המורות: מ-52% שענו נכון בנוסח א' ל-68% שענו נכון בנוסח ב', כאשר אצל הסטודנטיות להוראה חלה ירידה קלה באחוז העונות נכון: מ-77% ל-73%. אולם גם בנוסח זה אחוז המשיבות תשובות נכונות בקרב הסטודנטיות להוראה בנוסח ב' היה גבוה מזה שבקרב המורות.

על בעיית התולעת בנוסח א' ענו נכון 68% מהמורות ו-81% מהסטודנטיות להוראה, ואילו בנוסח ב' ענו נכון 36% מהמורות ו-27% מהסטודנטיות. בדומה לשאלת הנגר, גם כאן יש ירידה באחוז התשובות הנכונות במעבר מנוסח א' לנוסח ב'. אולם הפעם הסטודנטיות להוראה ענו טוב יותר על נוסח א' בהפרש של 13%, ואילו המורות ענו נכון יותר על נוסח ב' בהפרש של 9%. אחוז העונים נכון בקרב הסטודנטיות להוראה ירד ב-54%, ובקרב המורות הייתה ירידה של 32% בלבד.

לסיכום ניתן לראות בגרף מס' 2 את ההבדלים באחוזים של התפלגות התשובות בשני הנוסחים.

תרשים 2: ההבדלים באחוזים של התפלגות התשובות הנכונות בנוסח א' ובנוסח ב' בין המורות לסטודנטיות המתכשרות להוראה



בלוח 3 מוצגת התפלגות התשובות השגויות לכל אחת משלוש הבעיות בשני הנוסחים.

לוח 3: התפלגות התשובות השגויות

הבעיה	תשובות שגויות – נוסח א'			תשובות שגויות – נוסח ב'			
הנגר	16 דקות	48 דקות		15 דקות	12 דקות	20 דקות	
השוגים במספר ובאחוזים	3 (6%)	1 (2%)		28 (55%)	1 (2%)	1 (2%)	
טרקטורים	1 שעה	20 דקות		1 שעה	20 דקות		
השוגים במספר ובאחוזים	13 (25%)	4 (8%)		11 (21%)	3 (6%)		
תולעת	8 ימים	9 ימים	11 ימים	7 ימים	9 ימים	10 ימים	11 ימים
השוגים במספר ובאחוזים	1 (2%)	6 (12%)	6 (12%)	4 (8%)	9 (18%)	18 (35%)	2 (4%)

מתוך ארבע התשובות השגויות שניתנו בבעיית הנגר בנוסח א׳ היו שלוש מתכשרות להוראה שרשמו 16 דקות. יש שתי אפשרויות שעשויות להסביר את תשובתן השגויה: ייתכן כי המשיבות הכירו את הבעיה מנוסח ב׳, כי היא מופיעה בספר של חידות ואתגרי חשיבה (גזית, 1996) וחשבו שהפתרון זהה לבעיה בנוסח א׳ בלי להתעמק בניסוח השונה. אפשרות זו נראית סבירה מאחר שכל השלוש ענו נכון על אותה בעיה בנוסח ב׳. אפשרות אחרת היא ששלושתן ניתחו לא נכון את המצב המוצג בבעיה והתייחסו לחלקים במקום לניסורים, וזאת בלי שנחשפו לבעיה בעבר. מורה אחת רשמה כפתרון 48 דקות. הטעות שלה נובעת מקריאה לא נכונה וקידוד לא מתאים של הנתונים. היא התייחסה אל 12 הדקות כזמן הנדרש לכל ניסור (במקום ל-4 ניסורים) וכפלה ב-4 (במקום ב-5, אם כבר).

בנוסח ב׳ שגו 28 משתתפות וענו כי הזמן הוא 15 דקות, כאשר התפלגות התשובות הייתה של 15 מורות (60% מהמורות) ו-13 סטודנטיות (50% מהמתכשרות להוראה). חשוב לציין כי התשובה השגויה 15 דקות היא התשובה הנכונה בנוסח א׳ והנבדקות שנתנו תשובה זו בנוסח ב׳ התייחסו אל מספר החלקים כאל מספר הניסורים. בנוסף, ניתנו תשובות כמו 12 דקות, שזה אותו זמן למספר גדול יותר של חלקים. התקבלה גם התשובה: 20 דקות, אליה הגיעה הפותרת לאחר שחילקה 12 ב-3 (כנדרש) אבל כפלה ב-5 במקום ב-4.

תשובות שגויות אופייניות שניתנו בבעיית הטרקטור בנוסח א׳ היו כגון: הזמן הנדרש הוא 1 שעה. מתוכן ענו כך 8 מורות (32% מהמורות) ו-5 סטודנטיות (19% מכלל המתכשרות להוראה). כמו כן ארבע מורות ענו שהזמן הנדרש הוא 20 דקות. גם בנוסח ב׳ התמונה דומה: 21% מכלל הנשאלות, מחציתן מורות ומחציתן מתכשרות להוראה, ענו שהזמן הוא שעה ואילו שתי מורות וסטודנטית אחת ענו שנדרשות 20 דקות.

התשובה השגויה של שעה בשני הנוסחים נובעת מאי התייחסות להפחתת מספר הטרקטורים שמגדילה את הזמן פי שלושה ולהקטנת גודל החלקה שמפחיתה את הזמן פי שלושה. יש בתשובה שגויה זו התייחסות רק לגודל החלקה שקטנה פי שלושה, ולכן הזמן קטן באותו יחס. הפתרון השגוי של 20 דקות נובע מחלוקת שלוש שעות פעמיים בשלוש, מתוך הבנה מוטעית שהפחתת מספר הטרקטורים כמו הקטנת גודל החלקה מפחיתה את זמן החרישה.

מבדיקת התשובות השגויות בבעיית התולעת מתברר שרק משתתפת אחת השיבה 8 ימים לנוסח א׳, המהווה פתרון נכון של נוסח ב׳. אבל גם בנוסח ב׳ היא רשמה מספר שגוי: 7 ימים. שש משתתפות (מתוכן 4 מורות) השיבו 9 ימים, כלומר יום אחד פחות, כאשר שתיים מהן ציינו בתשובתן: יום ב׳. אפשר היה לצפות לתשובה שגויה כזו לו השאלה הייתה לא כעבור כמה ימים אלא באיזה יום תגיע התולעת לקצה הבור, וגם אז לא ברור מהיכן ההנחה שהתולעת התחילה לטפס דווקא ביום א׳. שש משתתפות (מתוכן 4 מורות) רשמו כפתרון 11 ימים, יום אחד יותר מהתשובה הנכונה. בהסברים הן נימקו כי אם לוקח לתולעת לטפס עשרה ימים, הרי שביום שלאחר מכן, שהוא היום האחד עשר, היא תגיע לקצה הבור.

בנוסח ב׳ ציינו תשע משתתפות (מהן 4 מורות) את המספר השגוי 9 ימים. שתי משתתפות (אחת מהן מורה) רשמו 11 ימים, 18 משתתפות (מהן 9 מורות) רשמו 10 ימים (זו התשובה

הנכונה בנוסח א׳). הבוחרות בפתרון שגוי זה חישבו, על פי נתוני הבעיה, שהתולעת מתקדמת בסך הכל כל יום במטר בעקבות החלקה ונסיגה של שני מטרים, ולא לקחו בחשבון שעקב העלייה של שלושה מטרים במהלך היום, עוד לפני הלילה בו היא הולכת לישון, התולעת מגיעה לקצה הבור. ארבע משתתפות (2 מהן מורות) השיבו 7 ימים, בלי להסביר מדוע.

דיון ומסקנות

מטרת מחקר זה הייתה להתחקות אחרי ההצלחה בפתרון בעיות אתגר בעקבות שינוי ניסוח מילולי ומאפיינים מתמטיים אצל מורים למתמטיקה ואצל סטודנטיות המתכשרות להוראת מתמטיקה.

שאלת המחקר הראשונה בדקה האם השינוי בניסוח המילולי ובמאפיינים המתמטיים ישפיע על ההצלחה בפתרונן. מהממצאים עולה כי שינוי בנוסח המילולי של בעיות שבעקבותיו יש שינוי באפיון המתמטי שלהן (בעיות הנגר והתולעת) משפיע על מידת ההצלחה בפתרונן.

בשאלת הנגר יש שינוי ניסוח שגרם לכך שפתרון מיידי הנראה לעין בנוסח א׳ הפך למכשול בנוסח ב׳. זאת לאור העובדה, שבדרך לפתרון השאלה בנוסח זה יש צורך להתמודד, כשלב ביניים, בשאלה המתייחסת למספר הניסורים שאינו נתון ישירות בבעיה. כתוצאה מהשינוי בניסוח, ירד אחוז הפתרונות הנכונים.

תמונה דומה נמצאה גם בבעיית התולעת. גם בבעיה זאת התבצע שינוי בניסוח המילולי שגרר עימו שינוי באפיון המתמטי של הבעיה. שינוי זה שינה את הפתרון. גם פה הפתרון המיידי הנראה לעין בנוסח א׳ של השאלה הפך למכשול בנוסח ב׳, וכדי לפתור נכון נדרש לייצג את הבעיה בצורה מוחשית (על ידי שרטוט) כדי להתרשם מהדרך שהתולעת עוברת. גם במקרה זה ירד אחוז הפתרונות מנוסח א׳ לנוסח ב׳.

ממצא נוסף מצביע על העובדה כי כאשר השינוי בניסוח המילולי אינו מביא לשינוי באפיון המתמטי של הבעיה, אין הבדל באחוזי הצלחה בין שני הנוסחים של הבעיה.

דוגמה לכך מהווה שאלת הטרקטורים, בה שינוי ניסוח הבעיה מהצגת שטח באורח כללי כחלקת אדמה להצגת שטח כמותי בדונמים לא גרם לשינוי בהבנת הבעיה ובדרך לפתרונה. אחוז הפותרות אכן עלה במקצת, אך לא באורח משמעותי מהנוסח בה הוצג השטח כחלקת אדמה לנוסח בה הוצג השטח כשלושה דונם. במקרה זה ההצגה המספרית של השטח תרמה למספר גדול יותר של משתתפות, בעיקר מורות, להשיב תשובה נכונה.

הממצאים תואמים את דבריו של ארזרלו (Arzarelo, 1998) בדבר הקושי הקיים בהבנת הנקרא ובקידוד הנתונים המילוליים לפתרון מתמטי מתאים.

בשאלות הנגר והתולעת התקשו הנבדקות לקדד את הנתונים בנוסח ב׳: בשאלת הנגר כשהתבקשו לבצע ״תרגום״ ולעבור מ״ניסורים״ ל״חלקים״, ובשאלת התולעת כשנדרשו לבצע ״מעבר״ מטיפוס של מטר ביום, לעלייה של שלושה מטרים במהלך היום והחלקה של שני מטרים בסופו של אותו יום.

שאלת המחקר השנייה התייחסה להבדלים בהצלחה בפתרון הבעיות בשני הנוסחים, בין

המורות למתמטיקה לבין סטודנטיות המתכשרות להוראה בתחום. בשתי השאלות, בהן עקב שינוי תוכן מילולי וניסוח מתמטי הייתה ירידה כוללת באחוזי ההצלחה (שאלת הנגר ושאלת התולעת), אין מגמה אחידה. בשאלת הנגר בנוסח א' אחוזי ההצלחה דומים ואין להסיק מכך דבר. אבל למרות ההבדל הקטן, חשוב לשים לב לכך שבנוסח א' היה יתרון למורות, ואילו בנוסח ב' היה יתרון לסטודנטיות. דבר זה מביא לממצא בולט יותר והוא השינוי מנוסח א' לנוסח ב'. אצל המורות ניכרת השפעה חריפה יותר — ירידה גדולה יותר לעומת הירידה אצל הסטודנטיות להוראה.

בשאלת התולעת, לעומת זאת, התהפך היתרון ועבר מהמתכשרות להוראה (בנוסח א') למורות (בנוסח ב'). בשאלה זו ה"עוקץ" של הבעיה אינו בהבנת הנקרא, אלא במציאת אסטרטגיה מתאימה לפתרון (לא חשובים הפרשי ההתקדמות ביום של התולעת אלא המסלול שעברה). כאן ניכרת השפעה גדולה יותר של השינוי בניסוח המילולי על הצלחת המתכשרות להוראה: הירידה באחוז התשובות הנכונות הייתה גדולה יותר אצלן מהירידה אצל המורות.

בבעיית הטרקטורים (בה שינוי הניסוח המילולי לא משפיע על האפיון המתמטי), יותר מתכשרות להוראה הצליחו לענות נכון על השאלה לעומת המורות. הפער הצטמצם בנוסח ב', בו חל שיפור אצל המורות.

בבעיה זו, על סמך הפתרונות השגויים שהתקבלו, ניתן לקבוע כי לא ההבדל בניסוח הוא זה שיוצר את הקושי לפתור את הבעיה. בשני הנוסחים יש להתייחס לשלושה משתנים, שהם מספר הטרקטורים, מספר השעות, וגודל השטח. התשובות השגויות נובעות מהעובדה שהפותרות התייחסו רק לשני משתנים מתוך השלושה, כמו מספר שעות ומספר טרקטורים או מספר שעות וגודל השטח, בין אם משתנה השטח מוצג כללית כחלקת אדמה או כ-3 דונמים.

את ההבדל באחוזי ההצלחה בין מורות למתכשרות להוראה בפתרון בעיות אתגר מסוגים שונים ניתן להסביר בכך שכאשר המורות מתבקשות לענות על בעיות המצריכות שימוש בדפוסי פתרון מקובלים, שהם חלק מההוראה היומיומית שלהן בכיתה, הן מצליחות יותר מהסטודנטיות שחסרות ניסיון בהוראה. לעומתן, הסטודנטיות שנמצאות בתהליך של רכישת מתודות שונות במסגרת הכשרתן המקצועית, נדרשות ביום־יום להפעיל דפוסי חשיבה מגוונים יותר ונחשפות יותר לפתרון בעיות אתגר מהסוג הזה.

חיזוק לכך ניתן למצוא במחקר על חשיבה יצירתית בפתרון בעיות (גזית ופטקין, 2009), שם הציגו מתכשרות להוראה פתרונות יצירתיים מגוונים, המעידים על חשיבה רחבה, בהשוואה להצגת פתרונות פחות יצירתיים שהציגו מורות למתמטיקה.

לסיכום, לאור הממצאים כי שינוי נוסח מילולי של בעיה הגורר שינוי באפיון המתמטי שלה, מקשה על הפתרון ומפחית משמעותית את אחוזי ההצלחה, מומלץ לחשוף יותר את העוסקים בהוראת מתמטיקה, כמו גם את המתכשרות להוראה, לבעיות אתגר מגוונות. בנוסף, חשוב להתמקד בשלבי פתרון בעיות שמציג פויה (Polya,1957).

רשימת מקורות

גזית, א׳ פטקין, ד׳ (2009). מקומה של יצירתיות בפתרון בעיות לא שגרתיות בסדרות אצל מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי ומתכשרים להוראה בתחומי דעת אחרים. **מספר חזק 2000**, גיליון 17, 16–24, אוניברסיטת חיפה.

זכאי, ד׳ (1990). **פסיכולוגיה קוגניטיבית**, יחידה 9. האוניברסיטה הפתוחה.

Arzarello, F. (1998). “The Role of Natural Language in Pre-Algebraic and Algebraic Thinking”, in H. Steinberg, M. Bussi & A. Sierpinska (Eds.), **NCTM**, Reston, Virginia.

Bruer, J. T. (1994).“How Children Learn”, **Executive Educator**, **16**(8), pp. 32-36.

Cobb, P., Yackel, E. & McClain, K., Eds. (2000). **Symbolizing and Communicating in Mathematics Class Room**, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Gilhooly, K. J. (1996). **Thinking: Directed, Undirected and Creative**, (3rd Ed.), London: Academic Press.

Hayes, J. R. (1989). **The Complete Problem Solver** (2nd ed.), Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum.

Jacobs, V. R., Ambrose, R. C. (2008-2009). “Making the Most of Story Problems”, **Teaching Children Mathematics. NCTM**, **16**(5). pp. 260-266.

Johnson-Laird, P.(2002). “Peirce, Logic Diagrams, and the Elementary Operations of Reasoning”, **Thinking and Reasoning**, **8**(1). pp. 69-95.

Merseth, K. K. (1993). “How Old is the Shepherd? An Essay about Mathematics Education”, **Phi Delta Kappan**, **74**(7), pp. 548-584.

Polya, G., (1957). **How to Solve it?** Princeton University Press.

Polya, G., (1981). **Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving**, (combined ed.), N.Y.: Wiley.

Sigler, R.S. (2006). “Micro-genetic Analyses of Learning”, in W. Damon & R. M. Lerner (Series Eds.) & D. Kuhn & R. S. Sigler (Vol. Eds.), **Handbook of Child Psychology**, Volume II: **Cognition, Perception, and Language**, (6th ed.), Hoboken, NJ: Wiley, pp. 464- 510.

E-mail: Patkin@netvision.net.il

E-mail: avikam@openu.ac.il