

רמות החשיבה בגיאומטריה של מורים ומתכשרים להוראת מתמטיקה, בנושאים שונים בגיאומטריה של המישור והמרחב, בנקודות ציון שונות במהלך הכשרתם

תקציר: מחקר זה דן ברמות החשיבה בגיאומטריה של מורים ומתכשרים להוראת מתמטיקה בנקודות ציון שונות במהלך ההכשרה המקצועית שלהם. המחקר מתמקד בשלוש הרמות הראשונות בגיאומטריה, על פי תיאורית ואן-הילה. בנוסף, המחקר בדק האם ישנם הבדלים בשליטה ברמות החשיבה הגיאומטרית של משתתפי המחקר בשלושה נושאים מרכזיים הנלמדים בגיאומטריה בבית הספר היסודי: משולשים ומרובעים, מעגל, גופים.

מהממצאים עולה כי רמות החשיבה של הסטודנטים הלומדים בשנה השלישית להכשרתם, דומות לאלה של הלומדים בשנה הרביעית להכשרתם ולאלה של קבוצת המורים הלומדים לקראת תואר שני. רמות החשיבה של הלומדים בשנה הראשונה להכשרתם ושל אלו הלומדים במסלול להסבה להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי היו הנמוכות ביותר.

השליטה ברמת החשיבה בנושא משולשים ומרובעים בכל אחת מחמש קבוצות משתתפי המחקר, הייתה גבוהה יותר מאשר בשני הנושאים האחרים. חלק גדול מהמורים ומהמתכשרים להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי שולטים ברמת חשיבה שלישית בנושא של משולשים ומרובעים. אחוז השולטים ברמה השלישית בפרק המעגל נמוך יותר. כל המשתתפים במחקר הפגינו חוסר שליטה בשתי רמות החשיבה הגבוהות יותר (רמת חשיבה שנייה ורמה שלישית על פי תיאורית ואן-הילה) בנושא גופים, כאשר חלק מהם שולטים ברמת החשיבה הראשונה בלבד וחלק לא שולטים אפילו בה. השאר אובחנו כ"לא עקביים" בשליטה ברמות החשיבה.

מילות מפתח: תיאוריית ואן-הילה, שליטה ברמות חשיבה בגיאומטריה, משולשים ומרובעים, מעגל, גופים, מתכשרים להוראת מתמטיקה, מורים למתמטיקה.

רקע תיאורטי

קיימות תיאוריות שונות העוסקות בהתפתחות החשיבה הגיאומטרית. תיאוריה ידועה אחת היא של בני הזוג פייר ואן-הילה ודינה ואן-הילה גלדוף. בשנת 1959 טען הזוג ואן-הילה כי יש חמש רמות בסדר היררכי. לאור ספקות שהתעוררו בקרב אנשי חינוך מתמטי, כולל ואן-הילה עצמו, לגבי קיום הרמה החמישית, מקובל כיום להתייחס לארבע רמות בלבד: שלב ההבחנה או השלב הוויזואלי, שלב הניתוח או שלב התיאור, שלב הסידור או שלב המסקנה הבלתי פורמלית,

ושלב ההיקש והמסקנה הפורמלית (Gutierrez, 1992; Van Hiele, 1987). לפי תיאוריית ואן-הילה, שליטה חלקית ברמה מסוימת היא תנאי הכרחי, אך לא מספיק, לשליטה ברמה גבוהה יותר. לא ייתכן שאדם ישלוט ברמה מסוימת לפני שישלוט בכל הרמות הקודמות לה, אחרת הוא נקרא "בלתי עקבי". בתיאוריה שלהם התייחסו בני הזוג ואן-הילה לגיאומטריית המישור בלבד.

בשנים האחרונות יש מחקרים המאמצים את התיאוריה שפותחה במישור לענפים נוספים במתמטיקה, כמו גיאומטריה של המרחב (צרפתי ופטקין, 2010; Patkin, 2010) ואריתמטיקה (Crowley, 1987; Guberman, 2008). חשוב לציין, כי מרבית המחקרים העוסקים בקשיים ברמות החשיבה התמקדו, בדרך כלל, בנושאים הקשורים למישור בלבד, כמו למשל במשולשים ומרובעים (פטקין, 1990; Halat & Sahin, 2008; Van Hiele, 1999), או מחקרים שעסקו רק בקשיים ברמות החשיבה בהנדסת המרחב (צרפתי ופטקין, 2010; Gutierrez, 1992; Patkin, 2010). לא נמצא מחקר שמתייחס לשליטה ברמות חשיבה בנושאים שונים כתמונה כוללת ובהשוואה בשליטה ברמות החשיבה בין הנושאים.

מאפיין נוסף של התיאוריה של הזוג ואן-הילה, בניגוד לתיאוריות למידה אחרות, בעיקר זו של פיאז'ה (Piaget, 1969), הוא ההתבססות על ההנחה כי ההתקדמות מרמת חשיבה אחת לשנייה תלויה יותר בהוראה מאשר בגיל או בכגרות ביולוגית (Van Hiele, 1999; Geddes, 1982; Fuys, Lovett & Tischler, 1982). מחקרים מצביעים על קשיים שיש לתלמידים בכל גיל (Koester, 2003) כמו גם למורים ולמתכשרים להוראה (Halat & Sahin, 2008). מחקר שנערך בנושא גיאומטריה וחשיבה מרחבית, בקרב ילדי גן וילדי כיתה ו', לגבי ביצוע אותה משימה, הראה כי למרות הפרשי הגיל יש רק הבדל מזערי לטובת הילדים הבוגרים כביצוע המשימה (Clements and Battista, 1992). במחקר שבדק ידע עצמי של מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי נמצא, שהמורים הצביעו על חוסר שליטה והבנה בגיאומטריה של המרחב. אולם, לאחר שהם התוודעו לתיאוריית ואן-הילה, כולל התנסויות, בהיותם במצבים שעודדו רפלקציה של חשיבה על חשיבה ("מטה-קוגניציה"), הם התקדמו ברמות החשיבה שלהם וגילו פתיחות ורצון ללמוד, להתמודד ולהשתפר (צרפתי ופטקין, 2010).

בהתאם לתיאוריה של ואן-הילה, המתבססת על ההנחה כי ההתקדמות מרמת חשיבה אחת לשנייה היא תלויה הוראה, גם קראולי (Crowley, 1987) טוען שסוג הפעילויות הניתנות ללומדים הוא משמעותי. במחקרו, שבדק חשיבה גיאומטרית במישור, הוא הראה שההתאמה בין רמת ההבנה של הלומדים ורמת המשימות שהם מקבלים הינה חיונית, אם רוצים שתתרחש למידה משמעותית.

המחקר המוצג במאמר זה התמקד בשלוש הרמות הראשונות, לפי תיאוריית ואן-הילה. לאור ההנחה כי ההתקדמות ברמות החשיבה הגיאומטריות (על פי ואן-הילה) הן תלויות הוראה,

מצאנו לנכון לבחון האם באופן כללי קיימים הבדלים ברמת החשיבה בגיאומטריה של מתכשרים להוראת המתמטיקה בשנת ההכשרה הראשונה שלהם, שנת ההכשרה השלישית, הרביעית, לעומת מורים למתמטיקה הלומדים לימודי תואר שני בחינוך מתמטי ואלו העושים הסבה מקצועית להוראת מתמטיקה. כמו כן, ביקשנו לבחון האם קיימים הבדלים ברמת החשיבה הגיאומטרית של הנשאלים לגבי שלושה נושאים ספציפיים שנלמדים בבית ספר יסודי (משולשים ומרובעים, מעגל וגופים).

שאלות המחקר

1. האם קיים הבדל ברמות החשיבה של מורים ומתכשרים להוראת המתמטיקה, בנקודות ציון שונות במהלך הכשרתם, באופן כללי בגיאומטריה, ובכל אחד משלושת הנושאים: משולשים ומרובעים, מעגל, גופים?
2. באיזו רמת חשיבה שולטים המורים והמתכשרים להוראת מתמטיקה בנקודות ציון שונות במהלך הכשרתם, בהתייחס לנושאים שונים במישור (משולשים ומרובעים, מעגל) ובמרחב (גופים)?

מתודולוגיה

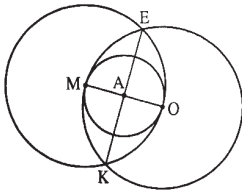
אוכלוסיית המחקר

אוכלוסיית המחקר מנתה בסך הכל 142 מורים ומתכשרים להוראת מתמטיקה, הלומדים במכללה אקדמית להכשרת מורים. אוכלוסייה זו כללה חמש קבוצות שונות של משתתפים: 46 סטודנטים הלומדים בשנה הראשונה להכשרתם כמורים למתמטיקה בבית הספר היסודי, 30 סטודנטים הלומדים בשנה השלישית להכשרתם, ו-17 סטודנטים בשנה הרביעית להכשרתם. חשוב לציין כי הסטודנטים אינם לומדים קורס בגיאומטריה בשנה השנייה להכשרתם ולכן לא נבדקו סטודנטים הנמצאים בשנה שנייה להכשרתם. בנוסף, כללה אוכלוסיית המחקר גם 24 מורים למתמטיקה הלומדים לתואר שני חינוך מתמטי ו-25 סטודנטים בעלי תואר ראשון או שני בתחום דעת אחר, העושים הסבה מקצועית להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי ובחטיבת הביניים.

מערך המחקר

כלי המחקר כלל שאלון הישגים המכיל שאלות רבות-ברירה, המאפשרות לקבוע את ההישגים ואת רמת החשיבה של המשיב על פי תיאוריית ואן-הילה. השאלון כלל 45 שאלות סגורות, כשלכל שאלה ניתנו חמש תשובות אפשריות ועל העונים היה לבחור את האפשרות הנכונה. 45 השאלות כללו 15 שאלות בנושא גופים, ו-30 שאלות בנושאים שונים על הנדסת המישור:

מחציתן (15 שאלות) על משולשים ומרובעים, והשאר (15 שאלות) על מעגל. כל חמש שאלות בכל קבוצה של 15 שאלות מייצגות רמת חשיבה נפרדת בסדר עולה. השאלות הוצגו בסדר הבא: חמש שאלות ברמה הראשונה בנושא משולשים ומרובעים, לאחר מכן חמש שאלות ברמה הראשונה בנושא מעגל וחמש שאלות בנושא גופים. בהמשך הוצגו חמש שאלות ברמת החשיבה השנייה על כל אחד משלושת הנושאים ולבסוף קבוצה של 15 שאלות ברמה השלישית על אותם נושאים. כל השאלות היו על בסיס שאלונים קודמים שפותחו על ידי פטקין (Patkin, 2010), ופטקין ולבנברג (2004, 2010). משך הזמן שנדרש למענה על השאלות היה 45 דקות. השאלות ברמה הראשונה כללו שאלות של זיהוי והבחנה.



דוגמה לשאלה ברמה ראשונה בנושא מעגל:

לפניך שרטוט של שלושה מעגלים: M , O ו- A .

איזו מהטענות הבאות נכונה?

- א. במעגל $A - M$ הוא קוטר; ב. במעגל $O - E$ הוא קוטר;
 - ג. במעגל $A - M$ הוא קוטר; ד. במעגל $O - M$ הוא קוטר; ה. במעגל $M - E$ הוא קוטר.
- השאלות ברמה שנייה התייחסו לתכונות גיאומטריות של הצורות הדרו-ממדיות או התלת-ממדיות. דוגמה לשאלה ברמה השנייה בנושא גופים:

איזו מהטענות הבאות נכונה לכל מנסרה?

- א. מעטפת מנסרה בנויה כולה ממשולשים; ב. למנסרה יש שני בסיסים מקבילים; ג. בסיסי המנסרה הם מלבנים; ד. מעטפת המנסרה מורכבת ממצולעים משוכללים. ה. בכל קודקוד מנסרה נפגשות ארבע צלעות.

ולבסוף הרמה השלישית, בה נכללו שאלות שהתייחסו ליחסי הכלה בין הצורות והגופים השונים ולהסקת מסקנות. דוגמה לשאלה ברמה השלישית בנושא גופים:

איזו מבין הטענות הבאות נכונה?

- א. אם לגוף 8 קודקודים, הוא בהכרח תיבה; ב. אם לגוף 8 קודקודים, הוא בהכרח קובייה;
- ג. אם לגוף 8 קודקודים, הוא בהכרח פירמידה; ד. אם לגוף 8 קודקודים, הוא בהכרח גוף משוכלל; ה. כל הטענות א'-ד' אינן נכונות.

מהלך המחקר

השאלון חולק בתחילת שנת הלימודים האקדמית לכל אחת מהקבוצות שלמדו בקורסים לגיאומטריה בהתאם לשנת הכשרתם (שנה א', שנה ג', שנה ד') ובמסלולים השונים (תואר שני, הסבה מקצועית). במפגש הראשון בקורס התבקשו הסטודנטים לענות באופן אנונימי על השאלון, כשהוסבר להם כי אין על כך ציון. נאמר להם במפורש כי השאלון נועד למפות את הידע שלהם כדי להיטיב את דרך ההוראה של המרצים באותם קורסים.

כלי הניתוח

הישיגי המשתתפים ברמות החשיבה השונות נבדקו על פי מספר התשובות הנכונות, כלומר, חישוב ממוצע הציונים הגולמיים (באחוזים). קביעת רמת החשיבה בנושאים השונים נעשתה על פי הציונים המשוקללים. נזכיר כי **שליטה ברמה מסוימת מחייבת שליטה בכל אחת מהרמות הקודמות לה**.

הציונים המשוקללים נקבעו על פי מפתח שהציע אוסישקין (Usiskin, 1982; פטקין, 1990) לפיו: לפחות ארבע תשובות נכונות מתוך חמש בכל רמה היא עמידה בקריטריון ברמה, ומזכה בנקודה אחת. הנוסחה לקביעת הציון המשוקלל היא כדלקמן: ציון משוקלל = עמידה בקריטריון ברמה 1 + עמידה בקריטריון ברמה 2 + עמידה בקריטריון ברמה 3. אם a הוא המשתנה המייצג את העמידה בקריטריון ברמה, והוא מקבל את הערכים 0 (לא עומד בקריטריון) או 1 (עומד בקריטריון, כי ענה על לפחות ארבע תשובות נכונות מתוך חמש), הרי שהציון המשוקלל ניתן לייצוג באופן הבא:

ציון משוקלל $= a \times 1 + a \times 2 + a \times 4$. (אם מתייחסים גם לרמה הרביעית יש להוסיף למחשבים גם את $a \times 8$). טווח הציונים המתייחס לשליטה בשלוש רמות החשיבה הראשונות של הגיאומטריה, נע בין 0-7 (פטקין, 1990; צרפתי ופטקין, 2010). באמצעות הציונים המשוקללים ניתן לאתר את השליטה ברמת החשיבה של הסטודנטים, כאשר סטודנט שלא הגיע לשליטה ברמה הראשונה יקבל ציון 0, ואם הוא שולט ברמה ראשונה הוא יקבל ציון 1. ברמה השנייה יקבל ציון 3 וברמה שלישית יקבל ציון 7. שאר הציונים מייצגים את הסטודנטים ה"בלתי עקביים".

ממצאים

שאלת המחקר הראשונה התמקדה בהבדלים ברמות החשיבה של מורים ומתכשרים להוראת המתמטיקה בנקודות ציון שונות במהלך הכשרתם באופן כללי בגיאומטריה, ובכל אחד משלושת הנושאים: משולשים ומרובעים, מעגל, גופים. בטבלה מספר 1 מוצגים הממוצעים באחוזים (M) וסטיית התקן (SD) של הציונים הגולמיים של הסטודנטים בכל אחת מחמש הקבוצות שהשתתפו במחקר זה. כאמור, כל תשובה נכונה זיכתה בנקודה אחת. בהתאם לכך, כל סטודנט קיבל ציון בין 0-45 (השאלון כלל 45 שאלות) וחושב ממוצע הציונים (באחוזים) וסטיית התקן של כלל הסטודנטים באותה קבוצה.

טבלה מספר 1: ממוצע הציונים הגולמיים (באחוזים) וסטיות התקן בשאלון ואן-הילה

SD	M		
13.87	57	(N=46)	שנה א'
12.42	74	(N=30)	שנה ג'
7.57	74	(N=17)	שנה ד'
10.52	74	(N=24)	תואר שני
13.08	67	(N=25)	הסבה

מטבלה מספר 1 אפשר לראות כי ממוצע הציונים הגולמיים של הסטודנטים בכל אחת מהקבוצות השונות אינו עולה על 74. כמו כן ניתן לראות, כי ממוצע הציונים בשנה א' נמוכים בהשוואה לממוצע הציונים של שאר קבוצות הסטודנטים, ואילו ממוצע הציונים הגולמיים של הסטודנטים הלומדים בשנה ג', בשנה ד', ושל המורים הלומדים לתואר שני – זהה.

בהתייחס לציון הממוצע של הסטודנטים להסבה, ניתן לראות מהטבלה, כי הציון הממוצע שלהם גבוה מהציון הממוצע של הסטודנטים בשנה א', אך נמוך מהציון הממוצע של הסטודנטים בשנים מתקדמות יותר ושל המורים הלומדים לתואר שני.

בטבלה מספר 2 מוצגים הממוצעים באחוזים (M) וסטיית התקן (SD) של הציונים הגולמיים של הסטודנטים בכל אחד מהנושאים שנבדקו: משולשים ומרובעים, מעגל, גופים. כל נושא כלל 15 שאלות, וחושבו ממוצע הציונים (באחוזים) וסטיית התקן של כלל הסטודנטים באותה קבוצה.

טבלה מספר 2: ממוצע הציונים הגולמיים (באחוזים) וסטיות התקן

בחלוקה לשלושה נושאים

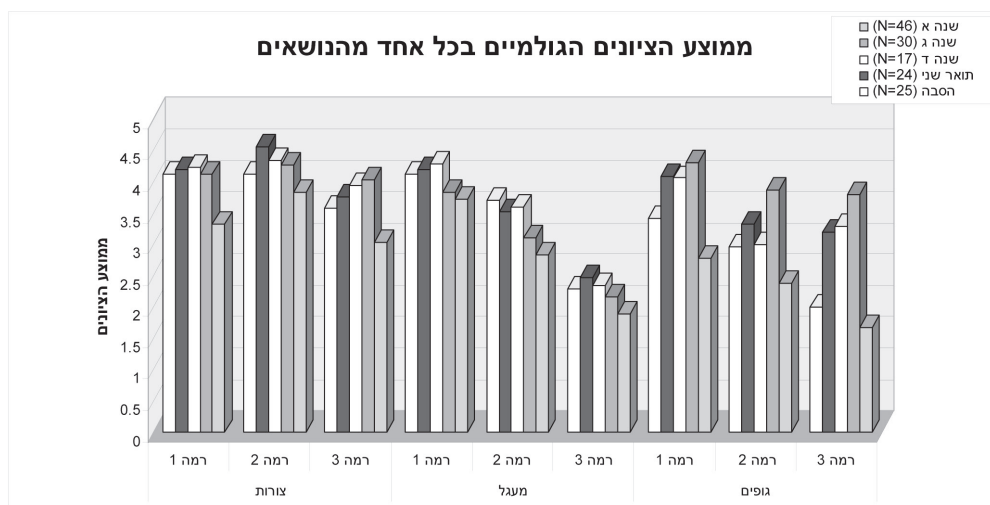
גופים		מעגל		משולשים ומרובעים			
SD	M	SD	M	SD	M		
2.04	46	2.74	56	2.70	68	(N=46)	שנה א'
2.60	80	2.45	61	2.17	83	(N=30)	שנה ג'
2.08	69	2.21	68	1.30	84	(N=17)	שנה ד'
3.37	71	1.72	68	1.84	83	(N=24)	תואר שני
2.21	56	2.60	67	2.39	79	(N=25)	הסבה

בטבלה מספר 2 רואים כי בכל אחת מקבוצות הסטודנטים שהשתתפו במחקר, ההישגים בנושא של משולשים ומרובעים היו גבוהים יותר מאלה של שני הנושאים האחרים (מעגל וגופים). הממצאים מצביעים על כך שהישגי הסטודנטים שלומדים בשנה א' נמוכים (ציון 68 בממוצע) מהישגי שאר המשתתפים בארבע הקבוצות האחרות (טווח של 79-84). בנושא מעגל – ההישגים של הסטודנטים משנה א' היו גם כאן הנמוכים ביותר (56), אבל גם בקרב המשתתפים בארבע הקבוצות האחרות ההישגים היו נמוכים במיוחד ונעו בין 61-68 בממוצע. בנושא גופים – ההישגים של הסטודנטים בשנה א' היו נמוכים במיוחד (46). אצל שאר המשתתפים הפיזור בהישגים רחב יותר מזה שהיה בשני הנושאים האחרים (56-80), כאשר הסטודנטים בשנה ג' קיבלו ציון גבוה יחסית (80) ואילו הסטודנטים בשנה ד' והמורים הלומדים לתואר השני קיבלו ציונים בטווח של 69-71. גם הסטודנטים במסלול הסבה להוראת המתמטיקה לא השיגו ציונים גבוהים וקיבלו רק 56 בממוצע.

נבחן כעת את ההבדלים ברמות החשיבה של הקבוצות השונות שהשתתפו במחקר, בכל אחד משלושת הנושאים שנבדקו.

בטבלה מספר 3 מוצגים הממוצעים וסטיית התקן של הציונים הגולמיים של הסטודנטים בכל אחד משלושת הנושאים שנכללו בשאלון על פי **רמות החשיבה השונות**. כל תשובה נכונה זיכתה בנקודה אחת. בהתאם לכך, כל סטודנט קיבל ציון בין 0-5 (בכל רמה היו חמש שאלות בכל אחד מהנושאים השונים), וחושבו ממוצע הציונים וסטיית התקן של כלל הסטודנטים באותה קבוצה. לוח מספר 1 מציג ממצאים אלה באמצעות דיאגרמת עמודות.

לוח מספר 1: ממוצע הציונים הגולמיים בכל אחד מהנושאים בציונים של 0-5



טבלה מספר 3: ממוצע הציונים הגולמיים בכל רמה (טווח 0-5) וטעיות התקן בכל אחד מהנושאים

נופים						מטעל						משולשים ומרובעים						
רמה 3		רמה 2		רמה 1		רמה 3		רמה 2		רמה 1		רמה 3		רמה 2		רמה 1		
SD	M	SD	M	SD	M	SD	M	SD	M	SD	M	SD	M	SD	M	SD	M	
1.00	1.67	0.77	2.39	0.88	2.78	1.27	1.89	1.39	2.83	0.90	3.72	1.38	3.04	1.24	3.83	0.91	3.33	(N=46) שנה א'
1.33	3.80	1.06	3.87	0.90	4.30	1.04	2.17	1.30	3.10	0.97	3.83	0.98	4.03	1.12	4.27	0.72	4.13	(N=30) שנה ג'
1.07	3.29	1.19	3.00	0.87	4.06	1.08	2.35	1.37	3.59	0.67	4.29	0.94	3.94	1.03	4.35	0.55	4.24	(N=17) שנה ד'
1.55	3.20	1.22	3.32	1.23	4.08	1.06	2.48	1.02	3.52	0.75	4.20	1.24	3.76	0.80	4.56	0.80	4.20	(N=24) תואר שני
1.25	2.00	0.73	2.96	0.81	3.42	1.43	2.29	1.02	3.71	0.94	4.13	1.15	3.58	1.01	4.13	0.67	4.13	(N=25) חסבה

מטבלה מספר 3 ומלוח מספר 1 עולה כי בנושא משולשים ומרובעים כל המשחתפים, בכל חמש הקבוצות, ענו נכון לפחות על שלוש שאלות בממוצע, בכל אחת מרמות החשיבה. לעומת זאת, בהתייחס לנושא מעגל, הממוצע של מספר התשובות הנכונות ברמה 3 נמוך יותר מאשר ברמות הראשונה והשנייה בנושא זה. תמונה דומה מתקבלת גם בנושא גופים.

שאלת המחקר השנייה המתמקדה בשאלה באילו רמות חשיבה שלטים המורים והמתכשרים להוראת מתמטיקה בשלושת הנושאים שנבדקו במחקר.

טבלה מספר 4 מציגה את אחוז הסטודנטים שענו נכון על לפחות 80% מהשאלות בכל אחד מהנושאים, ובכל אחת מהרמות. נזכיר, כי בכל אחת מהרמות היו חמש שאלות שהתמקדו בנושא מטרים (חמש שאלות בנושא משולשים ומרובעים, חמש שאלות בנושא מעגל וחמש שאלות בנושא גופים). טבלה מספר 4 מציגה, אפוא, את אחוז הסטודנטים שענו נכון על לפחות ארבע שאלות בכל אחד מהנושאים ובכל אחת מהרמות.

טבלה מספר 4: מספר הסטודנטים (באחרים) שענו נכון על לפחות 4 שאלות מתוך מקבץ של 5 שאלות שבאותו נושא ובאותה רמה

גופנים			מעגל			משולשים ומרובעים												
רמה 3	רמה 2	רמה 1	רמה 3	רמה 2	רמה 1	רמה 3	רמה 2	רמה 1										
SD	M	SD	M	SD	M	SD	M	SD										
0.15	2	0.25	7	0.36	15	0.28	9	0.48	37	0.49	59	0.50	44	0.48	65	0.49	39	(N=46)
0.48	63	0.47	67	0.37	83	0.25	7	0.50	43	0.50	57	0.47	67	0.34	87	0.34	87	(N=30)
0.50	47	0.46	29	0.42	76	0.32	12	0.49	59	0.32	88	0.42	76	0.32	82	0.24	94	(N=17)
0.50	56	0.50	48	0.45	72	0.32	12	0.50	56	0.4	80	0.43	76	0.27	92	0.37	84	(N=24)
0.33	13	0.37	17	0.50	54	0.43	25	0.48	63	0.43	75	0.49	42	0.41	79	0.37	83	(N=25)

הממצאים מצביעים על כך שבנושא משולשים ומרובעים, למעט תלמידי ההסבה, מספר העונים נכון על לפחות ארבע שאלות מתוך חמש ברמה השנייה גבוה מאדון המשיבים תשובות נכונות ברמה הראשונה. כלומר, סטודנטים אלו ידעו להשיב על שאלות לגבי תכונות של צורות טוב יותר מאשר לזהות את הצורות ולשיום אותן. המונח זו לא נמצאה בשני הנושאים הגיאומטריים האחרים. באופן כללי נמצא, שאדון הסטודנטים המשיבים נכון על לפחות ארבע תשובות נכונות יורד עם העלייה בקושי השאלות (לפי רמות חשיבה). טבלה מספר 5 לוח מספר 2 מציגים את השליטה ברמות החשיבה של הסטודנטים, סטודנט שלא הגיע לשליטה ברמה הראשונה קיבל ציון 0, ואם הוא שולט ברמה ראשונה הוא יקבל ציון 1. סטודנט השולט ברמה ראשונה וברמה שנייה וכלן יקבל ציון 3, וסטודנט השולט ברמה שלישית יקבל ציון 7 (שליטה בכל הרמות הקודמות וברמה הנכונה). שאר הציונים מייצגים את הסטודנטים ה"בלתי עקביים".

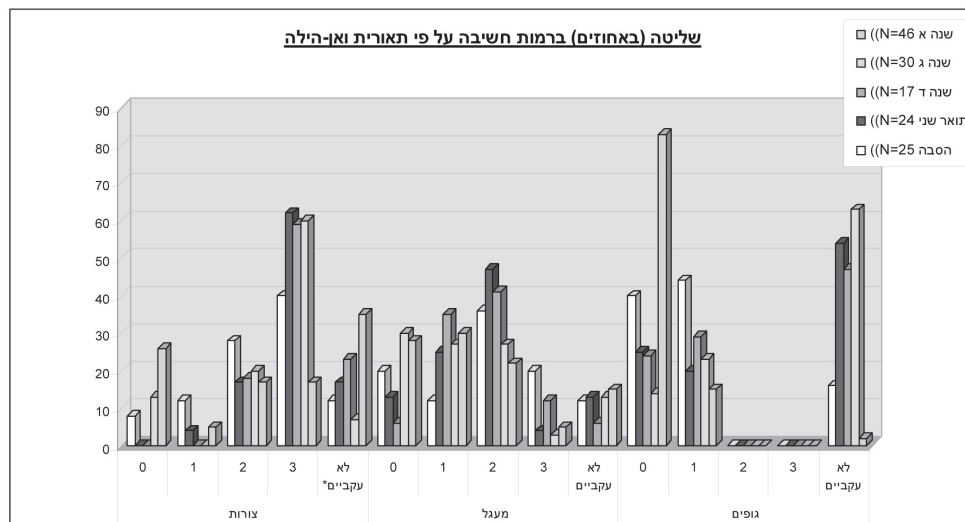
טבלה מספר 5: שליטה (באחוזים) ברמות חשיבה על פי תיאוריית ואן-היילן — על פי הציונים המשוקלים

גופים					מעגל					מסולעים ומרובעים					
לא עקביים*	3	2	1	0	לא עקביים*	3	2	1	0	לא עקביים*	3	2	1	0	רמה
אחר	7	3	1	0	אחר	7	3	1	0	אחר	7	3	1	0	ציון משוקלל
2	0	0	15	83	15	5	22	30	28	35	17	17	5	26	(N=46) שנה א'
63	0	0	23	14	13	3	27	27	30	7	60	20	0	13	(N=30) שנה ג'
47	0	0	29	24	6	12	41	35	6	23	59	18	0	0	(N=17) שנה ד'
54	0	0	20	25	13	4	47	25	13	17	62	17	4	0	תואר שני (N=24)
16	0	0	44	40	12	20	36	12	20	12	40	28	12	8	הסבה (N=25)

* לא שולטים ברמה הקונגניטבית על פי ההגדרה

מטבלה מספר 5 ומלוח מספר 2 עולה כי מרבית הסטודנטים להוראת מתמטיקה, בציוני דרך שונים כלמידה שלהם, שולטים בנושא צורות במישור העוסקות במשולשים ובמרובעים, ונמצאים ברמה השלישית לפי תיאוריית ואן-היילן. פרחי ההוראה בשנה הראשונה ללימודיהם שולטים בכך פחות, וחלק ניכר מהם שולטים ברמה השנייה בלבד. יותר משליש מהסטודנטים של שנה א' (35%) נמצאו בלתי עקביים בשליטה שלהם, כלומר, ידעו מה הן התכונות של אל אותן צורות אבל התקשו בוודאי הצורות (רמה ראשונה) ולכן בקראו לא עקביים. בנושא מעגל, מרבית הסטודנטים שולטים רק ברמה השנייה, וזה נכון לגבי כלל המשתתפים מכל חמש הקבוצות, ואילו בנושא גופים, מרבית המשתתפים נמצאים רק ברמה הראשונה או אפילו ברמה אפס, ואינם שולטים ברמות הגבוהות יותר של הכרת תכונות (הרמה השנייה) ושלב המסקנה הבלתי פורמאלית (הרמה השלישית).

לוח מספר 2: רמות החשיבה בשלושת הנושאים, על פי הציונים המשוקללים



דיון ומסקנות

מחקר זה בדק מה הם ההבדלים ברמות החשיבה של מורים ומתכשרים להוראת מתמטיקה בשלושה נושאים מרכזיים בגיאומטריה, הנלמדים בבית הספר היסודי, על פי תוכנית הלימודים במתמטיקה: משולשים ומרובעים, מעגל, גופים. כמו כן נבחנה השאלה, מהי רמת החשיבה באותם שלושה נושאים של מתכשרים להוראת מתמטיקה בשנת ההכשרה הראשונה שלהם, בשנת ההכשרה השלישית, הרביעית, של מורים הלומדים לתואר שני, וכן של סטודנטים העושים הסבה מקצועית להוראת מתמטיקה.

השאלות שנשאלו המשתתפים התייחסו לזיהוי צורות דו-ממדיות ותלת-ממדיות (רמה ראשונה על פי ואן-הילה), התכונות של אותן צורות (רמה שנייה על פי ואן-הילה) וכן ליכולת הסקת מסקנות באופן בלתי פורמאלי (רמה שלישית על פי ואן-הילה).

מחקרים שבחנו יכולת גיאומטרית של מתכשרים להוראה מצביעים על כך שרוב הנבדקים שולטים בדרך כלל בשתי הרמות הראשונות, ורק חלק קטן מהם שולט ברמה השלישית (Gutierrez, Jaime & Fortuny, 1991, Halat & Sahin, 2008; צרפתי ופסקין, 2010). ממצאי המחקר הנוכחי תומכים במסקנות מחקרים אלו. כל המשתתפים במחקר הם בעלי תעודת בגרות מלאה, כולל במתמטיקה, וחלקם למדו בתיכון מתמטיקה באופן מוגבר. למרות לימודי המתמטיקה, הכוללים גם גיאומטריה, לאורך שנות הלימוד בבית הספר היסודי ובתיכון, הם הפגינו שליטה רק ברמת החשיבה הראשונה בנושאים של מעגל וגופים, ולא הגיעו לשליטה בשתי רמות החשיבה החשיבה הגבוהות יותר (רמה 2 ורמה 3), כאשר חוסר השליטה בלט

במיוחד בנושא גופים. חשוב לציין כי בהתייחס למשולשים, הם הראו שליטה ברמת החשיבה שלישית.

אפשר להסביר זאת בעובדה שאת נושא המשולשים והמרוכבים מלמדים בבית הספר היסודי כבר בכיתות ג' וממשיכים איתו לאורך כל השנים עד סיום הלימודים. את נושא המעגל היה נהוג ללמד רק בכיתות ו', בעיקר בהתייחסות לשיום וזיהוי הצורות (ברמה ראשונה על פי תיאורית ואן-הילה), ותלמידים שהתמחו במתמטיקה באופן מוגבר למדו זאת פעם אחת במהלך לימודיהם התיכוניים ברמה פורמאלית, ללא שימת לב לידע קודם, פיתוח מיומנויות וכישורים בסיסיים וכו'. את נושא הגופים לימדו בעבר עוד פחות. הנושא היה אמור להילמד בכיתות ו', אך לאור חוסר האכיפה של הוראת התחום, חלק מהמורים לא לימדו אותו גם כתוצאה של חוסר זמן. במהלך הלימודים התיכוניים, רק תלמידים שלמדו באופן מוגבר, למדו את הנושא בכיתות הגבוהות, וגם אז רק במשך זמן קצר, וברמה הטכנית של שינון ופרוצדורות, ובעיקר מהיבט וקטורי.

בעקבות תמונת המצב העגומה במתמטיקה, הוחלט ב-2006 במערכת החינוך, על שינוי בתוכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי, וכן על שינוי בתוכנית הלימודים לחטיבת הביניים, שמתבצע בימים אלה. במסגרת השינויים הללו הוחלט כי יש להתחיל בהוראה של הנושא גופים כבר בכיתה ב', ובהמשך, באופן ספירלי ומדורג, עד סיום הלימודים בחטיבת הביניים, כדי להביא את התלמידים בסוף כיתה ט' לשליטה לפחות בשתי רמות החשיבה הראשונות בנושא. נושא המעגל קיבל התייחסות דומה בהוראת התחום. נושא המעגל נלמד כבר בכיתה ו' בבית ספר יסודי ובאופן מעמיק יותר בחטיבת הביניים.

בהתייחס לנקודות הציון השונות במהלך הכשרתם של המשתתפים במחקר זה, הממצאים מראים כי רמת החשיבה של הסטודנטים בתחילת שנת הלימודים האקדמית הראשונה שלהם ושל הסטודנטים להסבה נמוכה יותר מאשר של הסטודנטים בשנה השלישית או הרביעית להכשרתם, ומשל המורים בפועל. יתכן שניתן להסביר זאת בכך שהוראת הגיאומטריה במכללה להכשרת מורים, המשלבת למידה של התכנים הגיאומטריים, תוך שימת דגש על פיתוח מיומנויות וכישורים נדרשים, על פי ואן-הילה – התנסות והתמקדות בהיבטים דידקטיים מתוך מטרה להביא את הלומדים להתקדם בשליטה ברמות החשיבה – תרמה לכך שהמתכשרים להוראה בשנים ג' ו-ד', נמצאים ברמות חשיבה גבוהות יותר מאלה של הלומדים במסלול הסבה או בשנה א' במכללה.

ממצאים אלה תואמים את תיאוריית ואן-הילה, המדגישה כי המעבר מרמת חשיבה אחת לשנייה תלויה בעיקר בהוראה, או ליתר דיוק באיכות ההוראה (Van Hiele, 1999; Geddes, 2008; Fuys, Lovett & Tischler, 1982; Halat & Sahin, 2008). הוראה שהיא בגדר שינון וחזרה על אותם תכנים, ללא פיתוח כישורים ומיומנויות נדרשות, אינה מקדמת ברמות החשיבה.

נדגיש כי אצל המתכשרים להוראה בשנתם השלישית והרביעית ושל המורים בפועל, התקבלו ממצאים דומים. ניתן להסביר זאת בכך שהמורים בפועל קיבלו את הכשרתם במכללות להוראה ולכן נחשפו, במסגרת לימודיהם בקורסי הנדסה, לתיאוריה ולכישורים הנדרשים, ואלה הביאו לשיפור שליטתם ברמות החשיבה הגבוהות יותר בגיאומטריה.

הממצאים הללו מחזקים את הצורך בהעמקת הידע של מורים ומתכשרים להוראת מתמטיקה, בכל אחד משלבי הכשרתם והתפתחותם המקצועית, בנושאים השונים בגיאומטריה. בפרט בנושאי גופים ומעגל, שבהם הפגינו כל המשתתפים חוסר שליטה והישגים נמוכים.

ממצאי מחקר זה מצביעים על שתי מסקנות חשובות. המסקנה הראשונה היא שכנראה, הגורם המשפר את רמת השליטה בגיאומטריה של המורים והמתכשרים להוראה הוא הלימוד במכללות להכשרת מורים, וזאת לאור העובדה שרמת השליטה של המורים והמתכשרים להוראה, בשלבים המתקדמים שלהם בהכשרתם, גבוהה יותר מזו של מי שרק התחילו את מסלול ההכשרה. המסקנה השנייה היא שההכשרה במכללות אינה מספקת. יש לבחון אפוא בצורה מקיפה את הנושאים, את דרכי ההוראה ואת הפעילויות המוצעות למתכשרים להוראה, במסגרת הוראת הגיאומטריה על ענפיה השונים, במכללות להכשרת מורים ולהביא את כל העוסקים בהוראת התחום לשליטה טובה יותר, כדי שיהיה להם בסיס ידע מספיק טוב להורות את המקצוע לתלמידיהם.

כפי שציינו, סוג הפעילויות הניתנות ללומדים הוא משמעותי, וההתאמה בין רמת ההבנה של הלומדים ורמת המשימות שהם מקבלים הינה חיונית, אם רוצים שתתרחש למידה משמעותית (Crowley, 1987). ככל הנראה לא נעשה די בחלק מהנושאים הנלמדים, ובעיקר בנושאים שקשורים למעגל ולגופים. לכן, יש להוסיף שעות לימוד או קורסים שיכשירו את המורים לשליטה ברמות החשיבה הגבוהות של נושאים אלה, כדי שיוכלו ללמד זאת.

ביבליוגרפיה

פטקין, ד' (1990). השפעת השימוש במחשב ללמידה עצמית, במערך למידה יחידני של זוגות, על תפישה והבנת מושגים בגיאומטריה אוקלידית, ברמות חשיבה שונות, בקרב תלמידי בית ספר תיכון. **חיבור לשם קבלת תואר ד"ר לפילוסופיה**, אוניברסיטת תל אביב.

פטקין, ד', לבנברג, א' (2004). "הנדסת המישור" – חלק ב' לתלמידי חטיבות הביניים והחטיבות העליונות, הוצאת רכגולד בע"מ.

פטקין, ד', לבנברג, א' (2010). "הנדסת המישור" – חלק א' לתלמידי חטיבות הביניים והחטיבות העליונות, הוצאת המחברות.

צרפתי, י', פטקין, ד' (2010). השפעת פעילויות בגיאומטריה של המרחב בקרב מתכשרים להוראת מתמטיקה בבית ספר יסודי על הבנת מושגים ושליטה ברמות חשיבה גיאומטרית. **החינוך וסביבו**, הוצאת סמינר הקיבוצים, כרך ל"ג, עמ' 177-189.

- Clements, D. H., and Battista, M. T. (1992). "Geometry and Spatial Reasoning", In **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, G. Douglas,(Ed.), New York: Macmillian, pp. 420-464.
- Crowley, M. L. (1987). "Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought", In **Learning and Teaching Geometry, K-12**, 1987 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), edited by Mary Montgomery Lindquist and Albert P. Shulte, 1-16. Reston, Va.:NCTM.
- Geddes, D., Fuys, D., Lovett, J. C. & Tischler, R. (1982). **An Investigation of the Van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents**, Project Report, presented at NCTM 1982 Annual Meeting, Toronto, Canada.
- Guberman, R. (2008). "A Framework for Characterizing the Development of Arithmetic Thinking", **Proceedings of ICME-11-Topic study group 10, Research and Development in the Teaching and Learning of Number Systems and Arithmetic**, Mexico: Monterrey, pp. 113-121.
- Gutierrez, A., Jaime, A., and Fortuny, J. M., (1991). "An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the Van Hiele Levels", **Journal for Research in Mathematics Education**, 22(3), pp. 237-251.
- Gutierrez, A. (1992). "Exploring the Links Between Van Hiele Levels and 3-Dimensional Geometry", **Topologie Structural**, 18, pp.31-48.
- Halat, E., Sahin, O. (2008). "Van Hiele Levels of Pre- and In- Service Turkish Elementary School Teachers and Gender Related Differences in Geometry", **The Mathematics Educator**, 11(1/2), pp.143-158
- Koester, B. A. (2003). "Prisms and Pyramids: Constructing Three-Dimensional Models to Build Understanding", **Teaching Children Mathematics**, 9(8), pp. 436-442.
- Patkin, D. (2010). "The Role of 'Personal Knowledge' in Solid Geometry among Primary School Mathematics Teachers", **Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education**, 14(3), pp.263-279.
- Piaget, J. (1969). "The Intellectual Development of the Adolescent", In: **Esman, A.H. (Ed) The Psychology of Adolescence (1985)**, New York: International Universities Press.
- Usiskin, Z. (1982). Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry, **Final Report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry Project**, Chicago: University of Chicago, (ERIC Document Reproduction Service No. ED220288).
- Van Hiele, P. M. (1987). "Van-Hiele Levels, A Method to Facilitate the Finding of Levels of Thinking in Geometry by Using the Levels in Arithmetic", Paper Presented at the Conference on Learning and Teaching Geometry: Issues for Research and Practice, Syracuse University.
- Van Hiele, P. M. (1999). "Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play", **Teaching Children Mathematic**, 5(6), pp. 310-316.