אביקם גזית

המקרה המוזר של קומה ארבע וחצי: כיצד מתמודדים תלמידי כיתות ג׳-ו׳ עם פתרון בעיה מציאותית

תקציר: האם המתמטיקה נועדה לפתח חשיבה לוגית ולמצוא קשרים מקוריים ומעניינים במבניה השונים, או שהיא נועדה לשמש כלי עזר לפתרון בעיות בתחומי המדע, החברה כמו גם בחיי היום־יום. אפשר לומר שהוויכוח עקר, כי המתמטיקה נועדה לשתי המטרות, אלא שהוראתה בבית הספר היסודי אינה מתייחסת בכובד ראש למרכיב האותנטי היומיומי, וזאת למרות הצהרת הכוונות של תוכנית הלימודים.

מטרת המחקר היתה לבדוק כיצד תלמידי כיתות ג׳-ו׳ פותרים בעיה מציאותית, השואלת על הקומה האמצעית בבניין בן 9 קומות, ומתייחסים לתוצאה שקיבלו. אחוז ההצלחה הגבוה ביותר היה בכיתה ד׳, והנמוך ביותר בכיתה ו׳. אולם הממצא המעניין ביותר במחקר זה הוא ההתייחסות של התלמידים לתשובה הלא הגיונית והלא מציאותית: קומה $4\frac{1}{2}$, המתקבלת מחילוק 9:2. כחצי מתלמידי ו׳ וכשליש מתלמידי ה׳ נתנו תשובה כזו בלי מילת ביקורת על המספר שהתקבל, בעוד שרק כ-15%-13 מתלמידי ג׳-ד׳ ענו תשובה זו.

המסקנה הבלתי נמנעת היא, שככל שעולים בשכבות הגיל בבית הספר היסודי, כך מנתקת המתמטיקה הנלמדת את התלמיד מהמציאות. הוא אינו משתמש בשיקולים הגיוניים ופותר בעיות באורח מכני, ללא חשיבה ביקורתית. מומלץ אפוא להקדיש חלק נכבד משיעורי המתמטיקה בבית הספר היסודי לפתרון בעיות מציאותיות מחיי היום־יום ולתהליכי בקרה על התשובות המתקבלות.

מילות מפתח: בעיות מציאותיות, חשיבה, הוראת מתמטיקה, בית הספר היסודי, פתרון בעיות.

רקע תיאורטי

במאמר בשם: ?How old is the shepherd — בן כמה הרועה? מציגה Merseth (1993) בעיה מילולית שהוצגה לתלמידי כיתות ג׳ במערב התיכון של ארצות הברית: לרועה יש בעדר 125 כבשים ו-5 כלבים. בן כמה הרועה? כן, זו השאלה ואין פה טעות דפוס. לדברי מרסט, חוקרים טוענים כי שלושה מכל ארבעה תלמידים ייתנו תשובה מספרית, ומציגה דוגמה לדף פתרון של תלמיד: 125+5=130, זקן מדי! 5-125=120, עדיין זקן! 125:5=25, זהו, הרועה בן 25.

לטענת מרסט, המתמטיקה נתפסת בעיני התלמידים כאוסף של חוקים ותהליכים שיש לזכור ואחר כך להפעיל בצורה נכונה על הנתונים הרלוונטיים. הוראת המתמטיקה בכל השכבות מכוונת את הלומד להגיב בתרגיל מתאים מתוך רפרטואר אלגוריתמי מוכר. אין כמעט הדרכה

והכוונה לתהליכי חשיבה רפלקטיביים, המוליכים לחשיבה עצמאית, ביקורתית ויצירתית (גזית, 2004a).

אם מרסט מתייחסת לבית הספר היסודי, הרי שברואר מתייחס לחטיבת הביניים ומגיע למסקנה דומה (״בעיות מילוליות הן החור השחור של המתמטיקה בחטיבת הביניים — הרבה אנרגיה מוכנסת לתוכן, אך לא יוצא משם אור...״ (Bruer, 1994).

אחת הסיבות ל״חור השחור״ היא שרוב הבעיות שהתלמידים, בכל השכבות, נדרשים לפתור אינן חווייתיות, אינן אותנטיות ואינן רלוונטיות לעולמו של התלמיד. הבעיות המופיעות בספרי הלימוד עוסקות בתחום מצומצם של נושאים ומוצגות בצורה יבשה ומנוכרת.

היטיב לתאר זאת, בצורה תמציתית ויצירתית, המשורר יהודה עמיחי בשירו *״אני זוכר שאלה בספר לימוד חשבון״* (1998):

אני זוכר שאלה בספר לימוד חשבון,
על רכבת שיצאה ממקום אחד ורכבת אחרת
שיוצאת ממקום אחר. מתי ייפגשו?
ואף אחד לא שאל מה יקרה כאשר ייפגשו?
אם יעצרו או יעברו אחת על פני השנייה ואולי יתנגשו,
ולא היתה שאלה על איש שיוצא ממקום אחד
ואישה שיוצאת ממקום אחר. מתי ייפגשו?״...

מתוך השירה במיטבה עולה הביקורת על הבעיות המתמטיות, שאינן מתייחסות למציאות, ונשאלת השאלה: מה מהות המתמטיקה ומה תפקידה במקצועות הנלמדים?

המתמטיקה מוגדרת כ״מלכת המדעים״ ושייכת לקבוצת המקצועות הריאליים, בצד הפיסיקה והכימיה, שנלמדו בעבר במגמה התיכונית שנקראה ״מגמה ריאלית״. אבל מה כל כך ריאלי במתמטיקה? המתמטיקה על ענפיה השונים, עוסקת בישויות מופשטות ומרבית משפטיה, עקרונותיה ותהליכיה לא נוגעים למציאות היומיומית. אולם המתמטיקה מהווה בסיס להבנת עקרונות וחוקים במדעים השונים, בסיס להבנת הפיסיקה. מי שקידם את המכניקה בזכות המתמטיקה שיצר היה ניוטון, אבי החשבון הדיפרנציאלי־אינטגרלי (בלי לקפח את לייבניץ, שפיתח את הענף במקביל, מתוך ראייה פחות יישומית ויותר פילוסופית). מכל מקום, על בסיס המתמטיקה והפיסיקה נלמדת הכימיה, ועל בסיס שלושתן נלמדת הביולוגיה. אפשר להמשיך ולהציג את הפסיכולוגיה כמי שנשענת על הבנת הביולוגיה.

דוגמה מעניינת לכך מהווה עבודתו של ז׳אן פיאז׳ה, שעסק בהתפתחות החשיבה של ילדים ויצר תיאוריה מפורטת על מהות האינטליגנציה כמערכת מבנים הנוצרים תוך כדי אינטראקציה של הילד עם הסביבה. למרות עיסוקו ותרומתו המרשימה לפסיכולוגיה ההתפתחותית, ראה עצמו פיאז׳ה כביולוג וכפילוסוף של תורת ההכרה. הוא היה בעל דוקטורט בביולוגיה והתיזה שלו עסקה ביצורים החיים בים. יש לזכור שפיאזה עסק באפיסטמולוגיה ובעיקר חקר את התפתחות החשיבה הלוגית־מתמטית. התיאוריה שלו השפיעה על תוכניות הלימודים במתמטיקה ועל דרכי הוראת המקצוע.

העיקרון הבסיסי בתיאוריה של פיאז׳ה הוא, שמקור האינטליגנציה הוא הפעילות של הלומד עם הסביבה בתהליכי הטמעה והתאמה. הסביבה היא המציאות, ופיאז׳ה ממליץ על אינטראקציה עם הסביבה — התנסויות, המחשות, מודלים, ואפשר להוסיף גם משחקים ומחשב כבסיס לפיתוח חשיבה. אולם כמו הרבה הוגי דעות ופילוסופים חינוכיים, גם פיאז׳ה לא עובר במרבית המקרים את דלת הכיתה...

בין התקופות בהתפתחותו של הילד, לפי פיאז׳ה, ישנה התקופה האופרציונלית הקונקרטית. מדובר בין השנים 7–8 ל־11–12, שבמהלכן הילד רוכש אופרציות מסדר ראשון, כמו צירוף, סידור, מיון, הפיכות, יחס ועוד. חשיבתו של הילד לא זקוקה כבר להתנסות הישירה עם עצמים והוא מסוגל להתמודד עם סמלים המייצגים מצבים מוחשיים. מכאן נובע שילדים הנמצאים בתקופה הקונקרטית של החשיבה מסוגלים לבצע פעולות חשיבה מופנמות על מצבים מציאותיים, ויכולים לשלבן עם פעולות מוחשיות אחרות (בודן, 1999).

אך לא רק על הילד ליצור קשר בין המתמטיקה לסביבה כדי להגיע להבנה משמעותית של עקרונות מתמטיים. גם באוניברסיטאות קיימת הבחנה בין מתמטיקה עיונית לבין מתמטיקה שימושית, המהווה אמצעי במערכות שונות, כמו בתעשיה, בכלכלה, בצבא, באמנות, בספורט ובתחומים אחרים. מכאן, שעל המתמטיקה להילמד בגישה בין־תחומית כאמצעי להשגת יעדים בדיסציפלינות השונות (גזית, 2004a).

המתמטיקאי קרונקר אמר: ״אלוהים יצר את המספרים הטבעיים וכל היתר הוא מעשה ידי האדם״ (סינג, 2000). אפשר לראות במשפט הזה גם הכרזה על כך שהמתמטיקה נוצרה ללא קשר עם המציאות. אולם אפשר לפרשו כמתן אפיון הומאני למתמטיקה, תוצר המחשבה האנושית. אם כך, מדוע הוראת המתמטיקה מהווה מכשול ואינה מובנת לתלמידים רבים?

בהקדמה לספר ״המשפט האחרון של פרמה״, שואל עמוס נוי מדוע המתמטיקאים לא כותבים בשפה פשוטה, ברורה ועממית, על תחומי עיסוקם? הוא עונה חלקית על השאלה: ״מתמטיקאים הם בני אדם, אלא שהם מסתירים זאת היטב״. את תוצאות חקירתם הם כותבים כמסמך משפטי נוקשה ״הנעדר לחלוטין כל קשר לתהליך יצירה שלהם עצמם״ (שם).

אולם כבר בראשית דרכה, כתחום דעת הבנוי על טענות, משפטים והוכחות, החל מתורת המספרים של פיתגורס ומשפטו המפורסם המתייחס למשולש ישר זווית, עסקה המתמטיקה בתכונות המספרים וייצוגם הגיאומטרי, ללא קשר עם יישומם ביום־יום (גזית, 2004b). באקדמיה של אפלטון למדו מתמטיקה כגוף ידע העוסק בלוגיקה טהורה (שם). הגיאומטריה האאוקלידית שימשה אמצעי לפיתוח הרגלי חשיבה דדוקטיביים (Steen, 1989).

אותה גיאומטריה שכתב אוקלידס בספרו המפורסם ״האלמנטים״, לפני כ־2,300 שנה, נלמדת עד היום בשינויים מסוימים שהוכנסו רק בסוף המאה ה־19. Steen טוען שהורים רבים לא מבינים מדוע ילדיהם צריכים לייגע את מוחם במיומנויות לא יעילות ולא מעניינות. לדעתו, כדאי להתמקד ביישומים ובשימושים של הגיאומטריה, הגיאומטריה האנליטית והטריגונומטריה בענפי המדע השונים ובחיי היום־יום (שם).

אחת המטרות של הוראת המתמטיקה היא להשתמש בידע הנרכש כדי לפתור בעיות

יומיומיות (משרד החינוך 1988, 1990): ״התלמיד יכיר את היסודות של שפת המתמטיקה, המשמשת כיום את שפת מדעי הטבע ומדעי החברה, שימוש הולך וגובר״. וכן, בתוכנית הלימודים החדשה לבית הספר היסודי (2007) מומלץ להיעזר בסיטואציות מחיי היום־יום בלימוד המתמטיקה. גם הסטנדרטים להוראת מתמטיקה בארה״ב (NCTM, 2000) מדגישים את הצורך להבין ולהשתמש במתמטיקה בחיי היום־יום ובמקומות העבודה.

אולם למרות העיסוק בפתרון בעיות בחלק משיעורי המתמטיקה, הרי שבספרי הלימוד אין כיסוי למטרות שצוינו כמו גם להמלצות. קיים פער רב בין המתמטיקה הנלמדת בבית הספר לבין המציאות הקיימת מחוץ לבית הספר (אסמן ומרקוביץ, 2002).

הדיון העינייני במטרות של הוראת המתמטיקה הוא נדיר וכוללני בדרך כלל (McNelis & Dunn, 1997). כאשר שואלים ״מדוע צריך ללמד מתמטיקה?״ התשובות הן מתחמקות או טריוויאליות, כמו למשל: ״כל אחד זקוק למתמטיקה״. הוגובן (1962) תוקף את אלה הטוענים שמתמטיקה אינה אלא משחק אינטלקטואלי. לטענתו, המתמטיקה היא מכשיר שימושי בחיי היום־יום, ושפתה היא חלק חיוני בהשכלתו של הפרט בחברה.

ראסל (Russell, 1963) מביע עמדה שונה, לפיה המתמטיקה אינה אמצעי לייצור מכונות וכלי מלחמה, אלא ״יופי קר ואיזוטרי ללא פנייה לאיזה חלק מחולשת טבענו״. ועוד הוא כותב: ״הרוח האמיתית של עונג והתעלות, התחושה של היותנו יותר מבן אנוש, תוכל להימצא במתמטיקה ממש כמו בשירה״. ההשוואה לשירה אומרת דרשני לעניין ראייתו של ראסל את המתמטיקה כמדע טהור שאינו יישומי או שימושי לצורכי היום־יום.

הוויכוח על הדגשת היופי ופיתוח חשיבה לעומת התועלת והיישום בהוראת מתמטיקה התחיל, כאמור, עוד ביוון העתיקה (שפירא 1979). מספרים על תלמידו של אוקלידס ששאל על התועלת שבהוראת הגיאומטריה. בתגובה ביקש אוקלידס ממשרתו שייתן מטבע לאותו תלמיד וישלח אותו לרחוב, מאחר שהלה מחפש רק את התועלת שבלמידה (אונגרו 1989). ואילו איינשטיין הדגיש את חשיבותה של המתמטיקה כמכשיר רב־עוצמה לשימוש במדעי הטבע: ״הפיסיקה במהותה היא מדע אינטואיטיבי וקונקרטי. המתמטיקה אינה אלא אמצעי לבטא את החוקים השולטים בתופעות״ (קלפרייס, 1999).

יש אנשי חינוך מתמטי, המסכימים שהוראת המקצוע צריכה להתבסס על מתמטיקה כאמצעי תקשורת, כאמצעי לארגון העולם ולהבנייתו וכאמצעי לטיפול במידע (Pimm, 1987). כדי לעשות זאת יש לשנות ואף לבטל כמה אמונות מכשילות הנוגעות להוראת מתמטיקה, והחשובה שבהן: על המורים ומורי מורים להפסיק להאמין שהמתמטיקה היא גוף ידע המכוון רק על ידי חוקים ונלמד באמצעות זכירה של עובדות מספריות ותהליכים חישוביים טכניים (Merset, 1999).

לדעתה של רזניק (Resnic,1987), הלמידה בבית הספר היא של כללים ועיסוק בסמלים, וכאשר אלה מנותקים מהמציאות עלולים להיגרם קשיים ביישום הנלמד.

במחקר שנערך בברזיל (Nunes et al., 1993), נמצא שנערים בני 9–14 אשר מכרו מוצרים בדוכני רחוב, ביצעו חישובים שונים לצורכי קנייה ומכירה בקלות ובמיומנות רבה. לעומתם,

נבדקו תלמידי בית ספר בני 6–9 שלא ידעו להשתמש במתמטיקה לצורך חישוב מחירים וגם הגיעו לתוצאות לא הגיוניות. למרות המגבלה המתודולוגית של הבדלי גילים ושלבי ההתפתחות, אפשר לראות פער בין המתמטיקה הנלמדת בבית הספר לבין זו המתבצעת מחוץ לבית ספר. וכבר אמר איוון איליץ', בספרו על ביטול בית הספר (1973), שילדים לומדים הכל מחוץ לבית הספר ולמרות בית הספר.

אחת הסיבות לפערים בין המתמטיקה הנלמדת בכיתה לבין המתמטיקה הנדרשת מחוץ לכיתה היא האופי האחיד, "הסטריאוטיפי", של הבעיות הנלמדות בבית הספר (Gravemeijer, 1997).

קודם הוזכר שירו של יהודה עמיחי על רכבת שיצאה ממקום אחד, גם ראסל (Russel, 1996) מבקרת את הבעיות המוצגות בשיעורי מתמטיקה. היא טוענת שהבעיות אינן מייצגות את המציאות וכי השימוש בנתונים אמיתיים אינו מתאים ומספק. היא מציגה דוגמה לבעיה שנתוניה לקוחים מהמציאות: "מה האורך הממוצע של שבעת הנהרות הארוכים ביותר בעולם?" ותוהה, בצדק, לשם מה צריך לדעת את אורכם הממוצע של הנהרות.

בנוסף לאופי ה"סטריאוטיפי" של הבעיות, קיימת סיבה נוספת לקושי בפתרון בעיות בכלל, ובעיות אותנטיות בפרט: דרכי ההוראה של פתרון בעיות, שנעדרים מהן תהליכי חשיבה שיטתית וביקורתית.

פויה (Polya, 1957) מציג ארבעה שלבי יסוד בדרך לפתרון יעיל וטוב של בעיה מתמטית: הבנת הבעיה, עריכת תוכנית לפתרונה, ביצוע התוכנית וסקירה לאחור הכוללת בקרה.

בשלב הראשון, של הבנת הבעיה, יש להתמקד בשלושה דברים: מה מחפשים, מה הם הנתונים ומה הם התנאים. בשלב השני, של עריכת התוכנית, יש לבדוק האם הפותר פתר בעבר בעיה או בעיות דומות, והאם הוא משתמש בכל המושגים הטמונים בתוכן הבעיה. בשלב השלישי, של ביצוע התוכנית, יש לדאוג להכנסת הנתונים לדרך הפתרון שלב אחרי שלב, צעד אחר צעד. בשלב הרביעי והאחרון, שהוא סקירה לאחור וביקורת (רפלקציה), יש לבדוק האם התוצאה שהתקבלה הגיונית והאם ניתן להגיע לאותה תוצאה גם בדרך או בדרכים אחרות.

אם שלושת השלבים הראשונים באים לידי ביטוי במידה זו או אחרת בשיעורי החשבון, הרי שהשלב האחרון — הביקורת לא מקבל תשומת לב מספקת. שלב זה של בקרה והתבוננות לאחור אמור להסתמך על שיקולי היגיון וגם על הכרת המציאות היומיומית.

במחקר שנערך על ידי אסמן ומרקוביץ (2002) בדקו החוקרים עד כמה שיקולי היום־יום באים לידי ביטוי בהתמודדות עם בעיות במסגרת לימודי מתמטיקה. במחקר השתתפו 20 מורות למתמטיקה בבית ספר יסודי, ו–10 סטודנטיות המכשירות עצמן להוראת מתמטיקה. כמו כן השתתפו בו 50 תלמידי כיתה ו'.

בעיה אחת שהוצגה לנבדקים עסקה בהסעה: פיזור 175 נוסעים בין אוטובוסים, כאשר בכל אוטובוס יש מקום ל–40 נוסעים. כמה אוטובוסים יש להזמין?

בעיה אחרת עסקה בממוצע: בבניין גרות ארבע משפחות ויש להן יחד 10 ילדים. כמה ילדים בממוצע יש לכל משפחה?

כל המורות והסטודנטיות להוראה ענו נכון על בעיית ההסעה, כאשר הן מנמקות את פתרונן בהיכרות עם המציאות של הסעת תלמידים והזמנת אוטובוסים. חלק מהן אף ענו שהיו מנסות לדחוס יותר תלמידים לאוטובוס כדי להזמין רק ארבעה אוטובוסים ולא חמישה, כדי לחסוך בהוצאות.

לעומתן, ציינו חלק מהתלמידים את התשובה 4.375, בלי להתייחס לכך שאי אפשר להזמין חלקי אוטובוס. בין אותם תלמידים היו כאלה שרשמו "תוצאה לא הגיונית", והיו תלמידים שרשמו (15) 4–4 ושארית 15 כדי להתמודד עם בעיית השברים. ניתן אפוא לראות שתלמידים פותרים בעיות בלי להתייחס למציאות.

בבעיית המספר הממוצע של ילדים במשפחה, ענו 43% מהמורות שאין חצי ילד ולכן עיגלו את התוצאה ל-2 או ל-3. כל זאת, למרות שבמציאות היומיומית, כמו גם בתקשורת, הן נחשפות לממוצעים שאינם שלמים בערכים בדידים. חלק מהמורות טענו שאילו ידעו שממוצע יכול להיות 2.5, אז היו מלמדות זאת בכיתה, אבל ספרי הלימוד מציגים נתונים שבהם הממוצע הוא תמיד מספר שלם.

רוב התלמידים לא ידעו שאי אפשר לקבל ממוצע שאינו שלם כאשר מדובר במספר בני אדם.

תלמידים בעלי הישגים נמוכים כתבו כתוצאה 2.5, אבל עשו זאת טכנית ולא בשל הבנתם שהממוצע יכול להיות לא שלם. ואילו תלמידים בעלי הישגים טובים השיבו 2 או 3, בדומה למורות (Asman & Markovits, 2001).

במחקר שלפנינו נבדקה יכולתם של תלמידי כיתות ג׳-ו׳ (גילאי 8–11) להתמודד עם בעיה אותנטית המציגה נתונים מציאותיים מהסביבה הקרובה לעולמם.

המחקר

מטרת המחקר היתה לבדוק עד כמה תלמידי ג׳-ו׳ משתמשים בשיקול דעת הנובע מהתנסות יומיומית כדי לפתור בעיה מציאותית.

כלי המחקר: בפני התלמידים הוצגה השאלה: מהי הקומה האמצעית בבית בן 9 קומות?

שאלות המחקר:

1. האם יימצאו הבדלים באחוז הפתרונות הנכונים בין כיתות ג׳, ד׳, ה׳, ו׳?
2. האם יימצאו הבדלים במתן פתרון שגוי — $4^1/_2$, הנובע מפעולת החילוק הנלמדת בבית הספר, בין כיתות ג׳, ד׳, ה׳, ו׳?

אוכלוסיית המחקר: במחקר השתתפו 189 תלמידים מכיתות ג׳-ו הלומדים בבית ספר יסודי ממלכתי באזור המרכז.

התלמידים קיבלו דף ובו השאלה, והתבקשו לציין את הפתרון ואת הדרך שבה הגיעו לפתרון.

תוצאות המחקר

טבלה מס' 1: התפלגות התשובות בכיתות ג'-ו' (באחוזים)

תשובה	**5**	**$4\frac{1}{2}$**	**4**	**3**	**6**	**9**	**אין**	**אי אפשר**	**4+5**	**לא ענו**
ג (N=61)	50.8	14.8	11.5	3.3	8.2		4.9		1.6	4.9
ד (N=62)	67.7	12.9	4.8	4.8	1.6	1.6	4.8			1.6
ה (N=33)	51.5	33.3	3.0					6.1	3.0	3.0
ו (N=33)	36.4	42.4	6.1	3.0* (21/2)			9.1		3.0	
סה"כ	**53.9**	**22.2**	**6.9**	**3.2**	**3.2**	**0.5**	**4.7**	**1.1**	**1.6**	**2.6**

* תלמיד אחד רשם $2\frac{1}{2}$

ניתוח התוצאות

בטבלה מס' 1 ניתן לראות מספר ממצאים מעניינים, המתייחסים למטרת המחקר ולשאלותיו:

1. אחוז המשיבים נכון עולה מכיתה ג' (50.8%) לכיתה ד' (67.7%) — שבה אחוז ההצלחה הגבוה ביותר! לעומת זאת, בכיתה ה' יורד אחוז ההצלחה ל-51%, והוא דומה לאחוז ההצלחה של כיתה ג' (50.8%). ואילו בכיתה ו' אחוז ההצלחה הוא הנמוך מכל הכיתות — 36.4%!
2. במקביל לירידה במתן תשובה נכונה מכיתה ד' לכיתה ו', עולה משמעותית אחוז המשיבים תשובה לא מציאותית ולא הגיונית — קומה ארבע וחצי — מ-14.8% ו-12.9% בכיתות ג' ו-ד' בהתאמה, ל-33.3% בכיתה ה', ול-42.4% בכיתה ו'!
3. הירידה באחוז התשובות הנכונות מכיתה ד' לכיתה ו' מקבילה במידה רבה לעלייה באחוז התשובה הלא מציאותית $4\frac{1}{2}$. אם נחבר בכל אחת משלוש הכיתות ד', ה', ו' את אחוז המשיבים תשובה נכונה עם אחוז המשיבים את התשובה $4\frac{1}{2}$, תהיה התוצאה כ-80% (80.6%, 84.8%, 78.8% בהתאמה), כלומר, מרבית הכיתה.
4. מה שחשוב לעניין פתרון בעיה מציאותית בין כיתה ג' ל-ד' הוא האחוז הנמוך של התלמידים שתשובתם היתה לא מציאותית, ארבע וחצי — 14.8% ו-12.9% בהתאמה. זאת בהשוואה לאחוז התלמידים בכיתות ה'-ו' שענו כך — 33.3% ו-42.4% בהתאמה.
5. אם נחבר בכיתה ג' את שתי התשובות — הנכונה והלא מציאותית $4\frac{1}{2}$ — נקבל 65.6%, זה אחוז נמוך ביחס לסכום התשובות בשלוש הכיתות האחרות, שנע סביב 80%. כרבע מתלמידי ג' (23%) נתנו תשובה שגויה במספרים שלמים: 3,4,6. אבל בניגוד לתשובה $4\frac{1}{2}$, אלה קומות שאכן קיימות.

   בכיתה ד' ענו 12.8% מהתלמידים תשובות שגויות שנקבו בקומות שלמות: 3,6,9 כאשר התשובה 9 נראית כאי הבנת הנקרא.

בכיתה ה׳ רק תלמיד אחד רשם קומה 4 ובכיתה ו׳ — שני תלמידים ציינו את קומה 4.
תלמיד אחד בכיתה ו׳ כתב $2^1/_2$ — תשובה שיש בה חצי קומה ומעלה את אחוז העונים תשובה עם חצי קומה בכיתה ו׳ ל-45.4%!

6. א. בכל אחת מהכיתות ג׳, ה׳, ו׳ היה תלמיד אחד שרשם שיש שתי קומות אמצעיות: 4 ו-5 (תשובה מעין זו נכונה למספר זוגי של קומות — בבית בן 10 קומות).
ב. בכיתות ג׳, ד׳, ו׳ היו תלמידים שרשמו שאין קומה אמצעית — 3, 1, 3 תלמידים בהתאמה (גם תשובה כזו מתאימה למספר זוגי של קומות).
ג. בכיתה ה׳ כתבו שני תלמידים תשובה אולי זהה בפירושה ל"אין קומה אמצעית", אבל במילים אחרות: "אי אפשר". תשובה המתאימה גם היא למספר זוגי של קומות.

את שני הפתרונות המילוליים, "אי אפשר" או "אין קומה כזו", יחד עם הפתרון של שתי קומות אמצעיות, 4 ו-5, אפשר להוסיף לפתרון הלא מציאותי $4^1/_2$, מאחר שהם מעידים על אי־תפיסה נכונה של מצב אמיתי.

בכיתה ג׳ ציינו 6.5% מהתלמידים את אחד משלושת הפתרונות הללו, בכיתה ד׳ — 3.3%, בכיתה ה׳ — 9.1% ואילו בכיתה ו׳ — 12.1%. אם נחבר את אחוז הפתרונות הללו יחד עם הפתרון הלא מציאותי $4^1/_2$, נקבל בכיתה ג׳ — 21.3%, בכיתה ד׳ — 16.6%, בכיתה ה׳ — 42.4% ובכיתה ו׳ — 57.5% (אם נוסיף גם את התלמיד שרשם כפתרון $2^1/_2$).

לסיכום חלק זה של ניתוח התוצאות, אפשר לראות מעין עקומת U הפוכה, כאשר יש עלייה באחוז התשובות הנכונות במעבר מ-ג׳ ל-ד׳, ואילו במעבר מ-ד׳ ל-ה׳, ומ-ה׳ ל-ו׳ יש ירידה בתשובות הנכונות.

במקביל, יש עלייה באחוז התשובה הלא מציאותית: $4^1/_2$, כאשר בכיתות ג׳-ד׳ האחוז דומה, הוא עולה ב-ה׳ וממשיך לעלות ב-ו׳.

אסטרטגיות פתרון

טבלה מס׳ 2: אחוז המשתמשים באסטרטגיות שונות לפתרון

אסטרטגיה:	תרגיל 9:2 9:3	ציור קומות	רישום נקודות	מספרים במאונך	מספרים במאוזן	סה"כ
כיתה ג׳	3.2	3.3	1.6			8.1
כיתה ד׳	3.3	17.7		6.5	1.6	29.1
כיתה ה׳	3.0					3.0
כיתה ו׳	24.2	6.1		3.0	3.0	36.3

בטבלה מס' 2, המתייחסת לאסטרטגיות הפתרון שכתבו התלמידים ליד התשובה, אפשר לראות:

בכיתה ד', שבה אחוז ההצלחה הגבוה ביותר, יש גם האחוז הגבוה ביותר של המשתמשים בהמחשה של ציור קומות (17.7%) או רישום מספרים המייצגים קומות (8.1%) — בסה"כ כרבע מהכיתה.

בכיתה ו', שבה אחוז ההצלחה הנמוך ביותר, רק 12.1% השתמשו באותן המחשות ואילו כרבע מהתלמידים (24.2%) כתבו את התרגיל 9:2.

בכיתה ג' השתמשו שני תלמידים בציור קומות ותלמיד אחד ברישום נקודות לייצוג קומות, כדי להגיע לתשובה הנכונה. רק תלמיד אחד כתב את התרגיל 9:2 הגורם לפתרון השגוי. תלמיד אחד כתב, משום מה, כי התרגיל הוא 9:3 וענה קומה 3.

בכיתה ה' לא היה אפילו תלמיד אחד שהשתמש בציור או ברישום לייצוג הבעיה, ורק תלמיד אחד כתב את התרגיל השגוי.

בין התשובות היו כמה הסברים מקוריים ומעניינים, גם אם חלק מהם הובילו לתשובה שגויה:

תלמיד בכיתה ג' כתב: "אין קומה אמצעית, כי מספר הקומות הוא אי־זוגי".

תלמיד אחד בכיתה ד' השיב נכון, אבל ההסבר שכתב לא נכון, "כי יש עליית גג". מכאן אפשר להניח שהוא הוסיף את עליית הגג ל-9 וחילק 10 ב-2. הוספת 1 מתאימה לחישוב של האמצע או החציון, אבל היה צריך לחבר את הקומה הראשונה ולא את עליית הגג.

תלמיד בכיתה ד' כתב שאין קומה אמצעית, למרות שהוא צייר את הקומות.

תלמיד בכיתה ה' כתב שאי אפשר לקבל קומה אמצעית, כי המספר לא מתחלק, ואילו תלמיד אחר כתב שיש שתי קומות אמצעיות בלי לרשום את מספרן.

תלמיד בכיתה ו' כתב שאין קומה אמצעית כי המספר הוא אי־זוגי, ותלמיד אחר כתב שצריך שיהיה מספר זוגי. תלמיד אחד בכיתה זו הגיע לפתרון הלא מציאותי, כאשר חילק 9 ב-2. הוא קיבל ארבע וחצי, מחק את החצי והשאיר 4...

דיון ומסקנות

מטרת המחקר היתה לבדוק עד כמה תלמידי ג-ו' מפעילים שיקול דעת מציאותי כדי לפתור בעיה אותנטית מחיי היום־יום ומתחום עולמם ("מהי הקומה האמצעית בבניין בן 9 קומות"). שאלת המחקר הראשונה ביקשה לבדוק האם יש הבדלים בין תלמידים בכיתות ג', ד', ה', ו' במתן תשובה נכונה.

אפשר לפתור את הבעיה בכמה דרכים בלי להזדקק לחישוב: ציור קומות, רישום סימנים המייצגים קומות, כמו נקודות או רישום מספרי הקומות, כדי לראות את האמצע.

חישוב הקומה האמצעית מתקשר לתהליך חישוב הממוצע או החציון בסטטיסטיקה.

כדי לחשב את הקומה האמצעית אפשר להסתכל על הקומה האמצעית כממוצע בין הקומה ראשונה לקומה התשיעית או להסתכל על הקומה האמצעית כערך חציוני של התפלגות הקומות. בשני המקרים צריך לבצע את התרגיל הבא: $(9+1)/2=5$.

כאשר אין הבנה משמעותית של הצורך לחבר את הקומה הראשונה, שאינה מופיעה בנתוני הבעיה, משתמשים חלק מהפותרים בפעולת החילוק הנלמדת כבר, בתחום המאה, החל מכיתה ג׳.

בבעיה מופיע מספר הקומות — 9 ומבקשים לחשב את האמצע, שנתפס על ידי אותו חלק מהפותרים כמכוון לחלוקה ב-2. יש כאן אולי גם בלבול מושגים בין אמצע לבין מחצית: אם נשאל מהי הקומה האמצעית בבית בן 8 קומות, הרי שאין קומה אמצעית. אבל אם נשאל מה מספר מחצית הקומות בבניין — הרי שהתרגיל הנכון הוא 8:2 והתשובה היא 4.

באופן דומה אפשר לשאול: שני אחים ירשו בניין בן 9 קומות. איזה חלק מהבניין יקבל כל אח? התשובה במקרה זה עשויה להיות נכונה במצבים שונים: אפשרות אחת היא ששני האחים ימכרו את הבניין ויתחלקו שווה בשווה בסכום שיקבלו תמורתו. אפשרות שנייה היא לחלק את הדירות בקומה ואם מספרן זוגי (2, או 4) — הפתרון פשוט. לא משנה איך פותרים משפטית את הדילמה, אבל אפשר להתייחס למחצית הבניין גם אם מספר קומותיו הוא אי־זוגי.

בכיתה ה׳ לומדים לפי תוכנית הלימודים על הממוצע ולכאורה, תלמידי ה׳-ו׳ אמורים להשתמש בידע זה כדי לפתור נכון את הבעיה. אבל הבעיות שבהן עוסקים התלמידים מתייחסות להתפלגות ערכים, כמו תנובת חלב של פרות בשבוע, או התפלגות הטמפרטורות בחודש. בבעיות מסוג זה ברור לתלמידים שיש לחבר את סכום כל הערכים ולחלק במספרם.

בבעיה שהוצגה במחקר על הקומה האמצעית בבניין בן 9 קומות, יש צורך להפעיל חשיבה אנליטית־ביקורתית ולהגיע באופן עצמאי לנתון ה"חבוי" — קומה 1 כדי לחבר אותו לקומה 9 ולחשב קומה אמצעית.

אחוז הפתרונות הנכונים מכיתות ג׳ עד ו׳ (טבלה מס׳ 1) מציג תופעה מעניינת המחזקת אולי את דבריו של איוון איליץ׳ (1973) בספרו על ביטול בית הספר, אך יותר את המסקנה של לוין וליבמן (1987): בשיעורי החשבון מלמדים חישובים, ולא לחשוב.

תלמידי כיתה ג׳ הציגו אחוזי הצלחה דומים לאלה של תלמידי כיתה ה׳ (50.8%, 51.5% בהתאמה) וגבוהים יותר מאלה של תלמידי ו׳ (36.4%)!. אחוז ההצלחה הגבוה ביותר היה בכיתה ד׳ (67.7%).

כיצד אפשר להסביר תופעה זו, שנוגדת את השכל הישר המצפה לעלייה באחוזי ההצלחה במעבר מכיתה לכיתה, עם רכישת ידע מצטבר בתכנים מתמטיים. אפשר לראות גם סתירה מסוימת לתיאוריה של פיאז׳ה: תלמידי כיתה ג׳ (בני 8-9) נמצאים בתחילת שלב החשיבה האופרציונלי המוחשי, ואילו תלמידי ו׳ (בני 11-12) נמצאים לקראת המעבר לשלב החשיבה האופרציונלי הפורמלי. מצופה היה לקבל עלייה עם הגיל בפתרון בעיה מציאותית, המשלבת גם ידע פורמלי, הנרכש בעיקר בכיתות ה׳-ו׳. ולמרות זאת, התוצאות מציגות ירידה עם הגיל.

את אחד ההסברים לתופעה זו אפשר לקבל מהתפלגות התשובה השגויה והלא מציאותית $4^1/_2$, המהווה את שאלת המחקר השנייה: האם יימצאו הבדלים בין הכיתות בפתרון הלא מציאותי?

בכיתות ג׳-ד׳ התקבל האחוז הנמוך ביותר של תשובה זו: 14.8% ו-12.9% בהתאמה. בכיתה ה׳ הציגו 33.3% מהתלמידים תשובה זו, ואילו בכיתה ו׳ התקבל האחוז הגבוה ביותר של הפתרון הלא מציאותי — 42.4% , יותר מאחוז התשובות הנכונות — 36.4%!

תלמידי ו׳, כמו גם תלמידי ה׳ שנתנו את הפתרון $4^1/_2$, משתמשים באלגוריתם החילוק ב-2 כאמצעי למציאת האמצע, בלי לתת את דעתם לכך שקומה מתבטאת רק במספר שלם. אולי הם גם משלבים, כמוזכר קודם, ידע לא בשל שלא הגיע לידי הבנה משמעותית של חישוב ממוצע, ומיישמים בצורה שגויה את מה שלמדו. אפשר לראות חיזוק־מה לשימוש בפעולת החילוק בטבלה מס׳ 2: 22.4% מתלמידי ו׳ רשמו את התרגיל 9:2 כאסטרטגיה לפתרון הבעיה.

הם משתמשים בנתונים ומבצעים את התוכנית לפתרון הבעיה לפי תפיסתם, אך הם חסרים את שלב הבקרה, כפי שפויה (Polya, 1975) מדגיש את שלב הרפלקציה וההליכה לאחור, בו בודקים אם אכן הפתרון מתאים לנתונים שהוצגו בבעיה.

תלמידי ג׳ וגם ד׳ אולי פחות מנוסים בפעולות חילוק, לא למדו עדיין על הממוצע וגם מושג השבר נמצא רק בתחילת המשגתו. זה אולי הסבר חלקי לכך שהם מיעטו לתת את הפתרון הלא מציאותי.

הסבר נוסף אפשרי הוא שתלמידי כיתה ג׳, כמו גם תלמידי ד׳, עדיין לא שולטים דיים בפעולות החשבון הנדרשות לפתרון בעיות מצד אחד, ותכני ההוראה בכיתות אלה מתמקדים בעיקר במספרים שלמים ועדיין לא הגיעו לעסוק בשברים, מצד שני.

אפשר לקבל חיזוק לכך מפתרונות שגויים אחרים בכיתות אלה, המתבטאים במספרים שלמים — קומות אפשריות, למרות שאינן נכונות.

בכיתה ג׳ רשמו 22.0% מהתלמידים כפתרון את קומה 4, או קומה 6, הנמצאות משני צידי הקומה הנכונה — 5, וגם רשמו קומה 3 שלא ברור מקורה. בכיתה ד׳ ציינו 12.8% מהתלמידים את קומה 3, 4, 6 או 9. למרות הפתרון השגוי, אפשר להניח שתלמידים אלה מבינים שקומה חייבת להיות מספר שלם.

יותר ממחצית מתלמידי ו׳ מציגים פתרון שאינו מציאותי, דבר המעיד על אי התחברות לעולם היום־יום בו הם חיים. מסקנה דומה אפשר להסיק ביחס לתלמידי כיתה ה׳, אך באחוז קטן יותר. לעומתם, רק אחוז קטן מהתלמידים בכיתות ג׳-ד׳ הציגו פתרון שאינו מציאותי.

ממצאי מחקר זה, על הפתרונות הלא מציאותיים של תלמידי ו׳, מחזקים את ממצאי המחקר של אסמן ומרקוביץ (2002), שבו ענו חלק מתלמידי כיתה ו׳ תשובה לא מציאותית — 4.375 לשאלה בדבר מספר האוטובוסים הנדרשים כדי להסיע תלמידים.

לסיכום הדיון אפשר לומר, בערבון מוגבל, שבית הספר היסודי אינו מכשיר את בוגריו להתמודד עם פתרון בעיות בכלל, ועם בעיות מציאותיות מחיי היום־יום בפרט. ממצאי המחקר, שהיה אמנם מצומצם בהיקפו אך מהווה מדגם של בית ספר אחד באזור המרכז, מצביעים על כך שתהליך הלמידה במעבר מכיתה ג׳ ל-ו׳, גורם לניתוק הלומד מהעולם הסובב אותו.

כמחצית מתלמידי ו׳ ושליש מתלמידי ה׳ רואים במתמטיקה מכשיר ליצירת תרגילים מנתונים מספריים על פי דפוסים שנלמדים באורח מכני. הם אינם משתמשים בתהליכי חשיבה רפלקטביים — תהליכי בקרה, לבדיקת ההיגיון שמאחורי הפתרון. תלמידי ג׳-ד׳, לא רק שענו נכון באחוז גבוה יותר מתלמידי ו׳, רק מעטים מהם ענו תשובה שגויה שאינה מציאותית. הם עדיין "לא התקלקלו" בתהליך ההוראה ומחוברים למציאות.

כבר אמר מורה אמריקני בקשר לאי שילוב תכנים היסטוריים בהוראת מתמטיקה (הצד האנושי של המקצוע): ״וכך נוצרה ההרגשה שכל המערכת הזו (המתמטיקה) נפלה מוכנה מהשמיים לשימושם של מאחזי עיניים מקצועיים״.

ואולי הקומה ה-$4^1/_2$ היא אחיזת העיניים של אותם תלמידים, שבעצם יודעים שאין קומה כזו, אבל תהליך הוראת המתמטיקה מכניס אותם למעין ״פרפטום מובילה״: מכניסים מספרים ויוצאת פעולת חשבון טכנית, למרות המציאות המוכרת.

סביר להניח שחלק גדול מהתלמידים גרים בבנייני קומות, ובמעליות אין סימון של חצאי קומות. ואולי הם גם רצו להביע את מחאתם על הוראת המתמטיקה בדרך מנוכרת, לא מעניינת ולא רלוונטית לעולמם, אבל זה כבר עניין למחקר אחר.

פועל יוצא ממסקנות המחקר, והמלצה מעשית להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי: להקדיש יותר זמן לפתרון בעיות מציאותיות מעולם הלומד מסביבתו הקרובה וגם לתהליכי בקרה, המאמתים ומתקפים את הפתרון. הצגת בעיות מסוג זה תשפר את המיומנות בפתרון בעיות, וגם תגביר אצל התלמידים את ההנאה, המוטיבציה והעניין.

ביבליוגרפיה

אונגורו, ש׳ (1989), **מבוא לתולדות המתמטיקה**, חלק א׳, אוניברסיטה משודרת, משרד הביטחון.

איליץ׳, א׳ (1973), **ביטול בית הספר**. גבעתיים־רמת גן: מסדה.

אסמן, ד׳, מרקוביץ, צ׳ (2002), **מתמטיקה ומציאות — ביחד או לחוד. מספר חזק 2000**, כתב עת להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי, גליון 3, אוניברסיטת חיפה, משרד החינוך.

בודן, מ׳ (1999), **פיאז׳ה. סדרת גדולי הפסיכולוגים**, הוצאת דביר, תל אביב.

גזית, א׳ (2004a), הוראת מתמטיקה, עניין ויופי - הילכו יחדיו ואולי לא נועדו. בתוך שרה גורי־רוזנבליט (עורכת): **מורים בעולם של שינוי**, האוניברסיטה הפתוחה.

גזית, א׳ (2004b), **מצאתי...! על אנשים שאהבו לחשוב ולחשב**, הוצאת גייסט.

הוגובן, ל׳ (1962), **מתמטיקה למליון**, ספרית פועלים.

לוין, ת׳, ליבמן, צ׳ (1987), מה רוכשים תלמידים במהלך לימודי החשבון — חישובים או חשיבה? **דפים**, מכון מופ״ת.

משרד החינוך והתרבות (1988), **הצעה לתוכנית לימודים במתמטיקה**, מגן הילדים עד כיתה ו׳, ירושלים.

משרד החינוך והתרבות (1990), **הצעה לתוכנית לימודים במתמטיקה**, לכיתות ז׳-ט׳, ירושלים.

משרד החינוך והתרבות (2007), **תוכנית הלימודים החדשה במתמטיקה לבית ספר היסודי**, ירושלים.

משרד החינוך והתרבות (2009), **תוכנית הלימודים החדשה במתמטיקה לחטיבת הביניים**, ירושלים.

סינג, ס׳ (2000), **המשפט האחרון של פרמה**, הוצאת ידיעות אחרונות.

עמיחי, י׳ (1998), **פתוח סגור פתוח**, ירושלים: הוצאת שוקן.

קלפרייס, א׳ (1999), **כמו שאיינשטיין אמר**, הוצאת הד־ארצי.

שפירא, א׳ (1979), יופי, יעילות ותועלת בהוראת החשבון, עיונים בחינוך, 23–24, חיפה.

Asman, D. and Markovits Z. (2001). “The Use of Real World Knowledge in Solving Mathematical Problems”, In van den Heuvel- Panhuizen, M. (Ed.) **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, The Netherlands, **2**, pp. 65- 72.

Bruer, J. T. (1994).“How Children Learn”, **Executive Educator**, **16**(8), pp. 32-36.

Gravemeijer, K. (1997). “Mediating Between Concrete and Abstract”, in T. Nunes & P. Bryant (Eds.), **Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective**, Hove, East Sussex: Psychology Press Ltd, pp.315-345.

Merseth, K. K. (1993). “How Old is the Shepherd? An Essay About Mathematics Education”, **Phi Delta Kappan**, **74**(7), pp 548-584.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). **Principles and Standards for School Mathematics**, Reston:V.A.

Nunes, T., Schleimann A. D., and Caharrer, D. W. (1993). **Street Mathematics and School Mathematics**. New York: Cambridge University Press.

Pimm, D.(1987). **Speaking Mathematically**, Routlege & Kegan Paul: London.

Polya, G., (1957). **How To Solve It?** Princeton University Press.

Polya, G., (1981). **Mathematical Discovery: on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving**, (combined ed.), N.Y.: Wiley.

Resnick, L.B. (1987). “Learning in School and Out”, **Educational Research**, **16** (9), pp. 13-20.

Russel, S. J. (1996). “Changing the Elementary Mathematics Curriculum: Obstacles and Changes”. http://ra.terc.edu/hub/regional_networks/cia/math/elem-mathcurr.html

Russell, B. (1963). “The Study of Mathematics”, in **Mysticism and Logic**, London: Unwin, pp 48-58.

Steen, A. L. (1989). “Teaching Mathematics for Tomorrow’s World”, **Educational Leadership**, **7**(1), pp. 18-22.

E-mail: avikam120@walla.com